L896

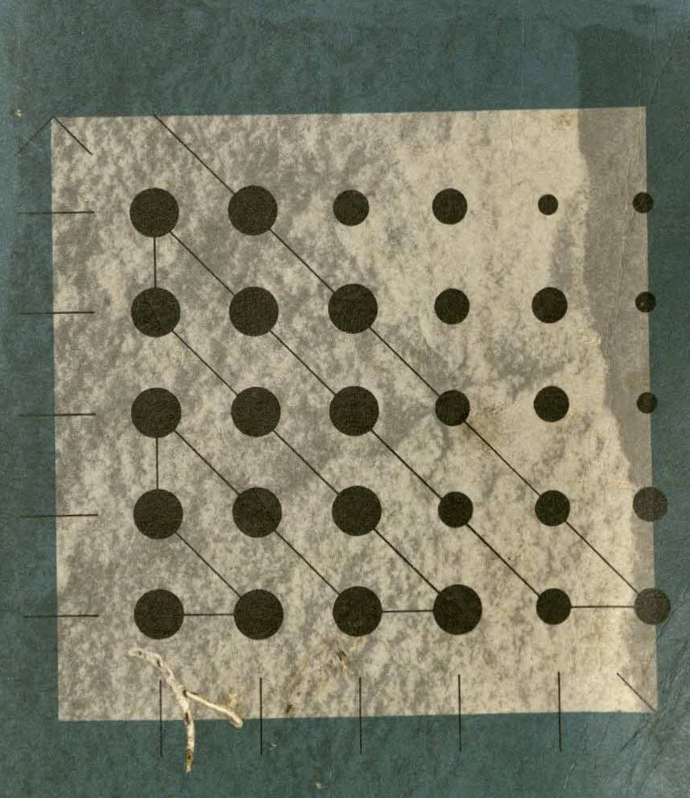
New trends in mathematics teaching

Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques

Volume I

(1966)

The teaching of basic sciences
Mathematics
L'enseignement des sciences fondamentales
Mathématiques



Unesco

The teaching of basic sciences
L'enseignement des sciences fondamentales

896 (4976)





1896

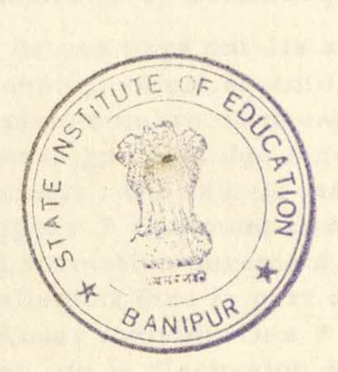
New trends in mathematics teaching

Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques

(1966)

Vol. I

prepared by
The International Commission of Mathematical Instruction (ICMI)



préparé par
la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM)



Unesco

19.5.2008
13375

Copyright in each paper reprinted in this collected edition remains in the possession of each author and publisher, from whom permission to reproduce has been obtained.

Collected edition published in 1967 by the
United Nations
Educational, Scientific and Cultural Organization,
Place de Fontenoy, Paris-7^e
Printed by Offset Aubin, Poitiers / 1719

AVS.66/XVII.2/AF
Printed in France

1896
STATE INSTITUTE OF EDUCATION MANIPUR

AVANT - PROPOS

L'Unesco a la lourde responsabilité d'aider, sur demande, les pays en voie de développement à améliorer leur enseignement des sciences. Ces pays savent que leur progrès économique est fonction de la possibilité qu'ils auront de former d'importants contingents d'hommes de science, d'ingénieurs et de techniciens. Ils savent aussi qu'il leur faut ouvrir toute la population à la science, pour établir les fondements solides d'une société technologique moderne. Or, les outils mêmes avec lesquels il leur faut mener à bien cette tâche - leurs écoles, instituts techniques et universités - n'ont pas l'efficacité voulue en raison des méthodes désuètes employées, et ils sont d'ailleurs dépassés par les évènements : la forte poussée démographique et l'accroissement rapide des connaissances scientifiques.

Aussi nombre de ces pays ont-ils accordé la priorité absolue à la modernisation de leur enseignement scientifique. Ce faisant, ils sont en quête de réponses à un certain nombre de questions d'importance vitale pour la réorganisation de l'enseignement des sciences selon des critères modernes, rationnels et fonctionnels : Qui faut-il instruire ? Que faut-il enseigner ? Quand faut-il l'enseigner ? Comment faut-il l'enseigner ? Quel équilibre faut-il maintenir entre la formation purement théorique et l'apprentissage strictement pratique ? Quelle doit être la part de l'enseignement magistral et quelle doit être celle des études individuelles ? Quel doit être le rôle, dans l'enseignement des sciences, de la discussion en petits groupes, des applications pratiques en classe, du travail de laboratoire individuel, des auxiliaires audio-visuels y compris de la télévision ? Etant donné la nécessité de donner un certain niveau de culture scientifique à la population tout entière, pour asseoir la société technologique de demain, quelle est la forme d'enseignement scientifique général qui donnera à cet égard les meilleurs résultats ?

Cherchant à trouver réponse à toutes ces questions, l'Unesco a élaboré un programme d'enseignement des sciences dont les objectifs principaux sont les suivants :

(a) Favoriser les échanges de renseignements sur le contenu et la méthodologie de l'enseignement des sciences ;

(b) Réaliser des projets expérimentaux en vue de la mise au point de méthodes et de matériels nouveaux pour l'enseignement des sciences ;

(c) Organiser, en collaboration avec les Etats membres, des programmes internationaux d'études universitaires supérieures et coopérer avec les Etats membres à l'établissement de centres de hautes études à l'intention des hommes de science, des enseignants et des chercheurs des pays en voie de développement ;

(d) Stimuler l'intérêt porté à la science et à l'enseignement des sciences et faire mieux comprendre l'influence que la science exerce sur les affaires humaines en patronnant des tournées de conférences faites par des savants éminents et en décernant des prix internationaux comme le Prix Kalinga.

La publication de la nouvelle collection biennale,"L'enseignement des sciences fondamentales", répond au souci de ménager un échange d'informations sur le contenu, la conception générale, les programmes et les techniques modernes de l'enseignement de ces sciences. La collection complète comprend quatre volumes consacrés respectivement à la physique, à la chimie, à la biologie et aux mathématiques.

Le présent volume,"Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques", a été établi en étroite collaboration avec la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques de l'Union mathématique internationale. Il est destiné aux professeurs de mathématiques exerçant dans les universités, les écoles normales et les établissements secondaires, aussi bien qu'aux étudiants en mathématiques, surtout s'ils se destinent au professorat.

FOREWORD

Unesco faces a heavy responsibility in helping the developing countries, at their request, to improve their science teaching. These countries are aware that economic development depends upon their ability to train large numbers of their own people as scientists, engineers and technicians. They know, too, that they must bring about a widespread understanding of science among the entire population if they are to create a sound basis for a modern technological society. Yet the very instruments with which they must carry out these tasks - their schools, technical institutes and universities - are weakened by obsolete methods and overloaded by the vast increase in population and by rapid growth in scientific knowledge.

Understandably, many of these countries have given the highest priority to a thorough modernization of their science teaching. In this, they are searching for answers to a number of questions of basic significance to the reorganization of science education along contemporary, rational and functional lines : Who should be taught ? What should be taught ? When should it be taught ? How should it be taught ? What balance should be kept between purely theoretical training and strictly practical apprenticeship ? How much oral instruction from the teacher and how much individual study by the student is required ? What is the role of the small group-discussion, the classroom demonstration, the individual laboratory experiment, of audio-visual aids, including television, in science education ? In view of the need for scientific literacy among the entire population as a basis for a technological society, what form of general science teaching can best bring about a widespread understanding of science?

In its search for answers to such questions, Unesco has developed a programme in science teaching whose main objectives are the following :

(a) to promote exchanges of information on the content and methodology of science teaching ;

(b) to conduct experimental projects for developing new science-teaching methods and materials ;

(c) to organize, in collaboration with Member States, international post-graduate training programmes and to co-operate with Member States in the establishment of advanced training centres for scientists, teachers and research workers in developing countries ;

(d) to stimulate interest in science and science teaching and to promote understanding of the impact of science on human affairs, by sponsoring lectures by distinguished scientists and by granting international awards such as the Kalinga Prize.

With the publication of the new biennial series "The Teaching of Basic Sciences", Unesco aims at providing an exchange of information on modern content, approaches, curricula and techniques in the teaching of the basic sciences. One volume on each of the sciences - physics, chemistry and biology - and one on mathematics, make up the complete series.

This volume, "New Trends in Mathematics Teaching", has been drawn up in close collaboration with the International Commission of Mathematical Instruction of the International Mathematical Union. It is intended for use by mathematics teachers in universities, teacher-training institutions and secondary schools, as well as by university students of mathematics, especially those training to be teachers.

Table des matières

Contents

INTRODUCTION

par André Lichnerowicz

Au sein de la science, les mathématiques jouissent d'un statut particulier. Discipline autonome, elles se font aussi, pour les autres disciplines, instrument de pensée. Tout notre effort d'intelligence du monde physique tend bien souvent à l'élaboration de ces grandes théories qui visent à représenter, aussi finement que possible, de larges portions du réel et cette représentation est mathématique. Il convient, à chaque instant, de comparer ces théories au réel, de vérifier qu'elles ne sont point théories de quelque monde imaginaire et cette comparaison s'effectue par l'enchevêtrement d'expériences savamment élaborées et de déductions mathématiques.

Au cours du dernier siècle la science a fait comme explosion et nous nous sentons tous un peu écrasés par le poids même des publications, témoins du travail des innombrables savants qui oeuvrent partout dans le monde. Mais la science n'est point accumulation de faits. Elle est savoir, organisé et pensé et, à cette science en développement presque exponentiel, les mathématiques prêtent l'économie de pensée qui est la leur. C'est peut-être grâce à elles que la science, que l'activité scientifique est encore possible ; ce sont elles qui constituent certainement le facteur le plus notable de l'unité de la science.

Mais de quelles mathématiques s'agit-il? Y a-t-il ici un domaine des mathématiques appliquées, servantes des autres disciplines, et là une mathématique pure orgueilleuse de son autonomie, en interaction très faible avec les précédentes ? Il n'en est rien. Les mathématiques applicables au réel, ce sont en fait celles qu'a réussi à connaître le praticien de telle ou telle discipline. Il arrive que tel professeur de physique se plaigne qu'on enseigne à ses étudiants des "mathématiques inutiles". Bien souvent elles ne sont inutiles que parce que le physicien courant les ignore et n'aura donc jamais l'idée de les utiliser. Le champ des mathématiques "utiles" subit de brusques mutations dans le temps à la fois selon les problèmes qui intéressent la communauté scientifique et selon l'éducation mathématique même de cette communauté.

De toutes les sciences, ce sont peut-être les mathématiques qui, au cours du dernier siècle, ont le plus évolué dans leurs intérêts, dans leurs objets, dans leurs méthodes d'approche. A partir de 1830 environ, a commencé une réflexion systématique des mathématiques sur elles-mêmes qui leur a permis à la fois de mieux assumer leur ambition de cohérence, de connaître les limites de cette ambition, de permettre une remarquable économie de pensée et de bénéficier d'une puissance sans commune mesure avec le passé. Il y a eu mutation de ce qu'on peut nommer "les mathématiques classiques" en une mathématique une, notre mathématique contemporaine qui pourrait être caractérisée de la manière suivante : au lieu de subir les structures mathématiques et de les reconnaître un peu au hasard, la mathématique s'est efforcée de les dominer.

Mais toute démarche scientifique neuve, la démarche des mathématiques elles-mêmes, ne se borne pas à la conquête de nouvelles connaissances ; elle nous offre de l'acquit lui-même une image différente et nous oblige à réélaborer douloureusement les concepts sur lesquels nous vivions. Une pensée scientifique neuve nous offre ainsi un passé renouvelé, en même temps qu'un avenir à bâtir.

Il arrive ainsi que les problèmes de l'éducation mathématique soient parmi les plus importants et les plus difficiles de ceux que pose l'enseignement de la science. Ces problèmes n'intéressent pas seulement le futur mathématicien professionnel, mais ils importent aussi, au premier chef, non seulement au physicien et à l'ingénieur, mais à l'économiste et au sociologue.

Trop souvent encore, la mathématique enseignée est disséquée à l'état de cadavre ou contemplée à l'état d'architecture achevée et figée, et il arrive que de bons esprits finissent par se demander "comment est-il encore possible de créer en mathématique?". Ceci porte, je crois, jugement sur un enseignement. Il convient, semble-t-il, d'éviter soigneusement un enseignement mathématique de type historique, composé de couches hétérogènes juxtaposées, d'époques différentes, celle-ci réfléchissant l'état d'esprit de la science grecque et cette autre celui du XVIIe siècle européen. Il nous faut fondre tout cela au feu de l'esprit contemporain. Qu'on m'entende bien ; l'histoire des sciences, celle des mathématiques en particulier, sont des disciplines précieuses pour chaque homme, mais elles ne sauraient fournir, par elles-mêmes, une base pour l'éducation mathématique. C'est à l'état d'esprit des mathématiques contemporaines que nous devons faire participer nos enfants pour leur épargner de difficiles et inutiles déconditionnements.

Cela n'est point aisé. Il est certes plus confortable de pratiquer honnêtement un enseignement traditionnel, rodé par des siècles d'expérience, mais qui cependant, dans une classe, ne parvenait bien souvent

à intéresser qu'une faible fraction des élèves.

A l'enseignement moderne des mathématiques, tout le talent pédagogique et toute la science de nos collègues sont nécessaires et il est heureux de voir que, depuis 1945, partout dans le monde, des animateurs ou des centres sont au travail. Le but de ces "nouvelles tendances" est d'assurer une liaison fraternelle entre tous ceux qui s'intéressent ou voudraient s'intéresser à cette tâche, à la fois nécessaire et passionnante. Nous ne nous dissimulons point tout ce que ce premier volume a de partial, de partiel et d'imparfait. Il se veut d'abord témoignage d'existence et appel à tous ceux qui voudraient enrichir les volumes suivants. Il se compose essentiellement d'articles variés rangés sous deux rubriques : communications à des réunions consacrées à l'enseignement mathématique d'une part, articles originaux ou reproduits d'autre part. Le volume est complété par les premiers éléments d'une documentation qui s'enrichira dans les tomes suivants : liste de colloques sur l'enseignement mathématique, première liste de revues s'intéressant à ce sujet et de "centres" où l'on s'efforce d'étudier et de faire mûrir les problèmes de l'éducation mathématique. Ces "centres" peuvent être de statuts variés : simples groupements autour d'un animateur ou véritables centres ayant une existence administrative.

Je fais appel à tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement mathématique pour qu'ils adressent au secrétariat de la revue "L'enseignement mathématique" (Université de Genève) toutes les informations utiles concernant revues et centres afin que la présente documentation puisse se compléter de volume en volume.

Le présent volume n'aurait point vu le jour sans les innombrables heures que lui a consacré Madame Krygowska, professeur à l'Université de Cracovie. Qu'elle veuille bien trouver ici le témoignage de notre profonde gratitude.

A. Lichnerowicz
président de la C.I.E.M.

INTRODUCTION

by André Lichnerowicz

In the realm of science, mathematics has a special position. It is an independent discipline, but it also provides other disciplines with a tool for their thinking. In all our efforts to understand the physical world, the trend is very frequently towards the construction of those major theories which seek to represent wide segments of the physical world as subtly as possible, and do it in mathematical terms. It is desirable to check these theories at every stop against the facts, to verify that they are not just theories of some imaginary world and this is done by assorting judiciously designed experiments and mathematical deductions.

In the course of the last century there has been a kind of "science explosion" and we are all rather overwhelmed by the very mass of the publications testifying to the industry of the innumerable scientists at work all over the world. But science is not just the accumulation of facts. It is knowledge organized and reasoned out, and to science so understood, which is developing in an almost exponential manner, mathematics lends its own particular economy of thought. It is perhaps only thanks to mathematics that science and scientific activity are still possible ; and mathematics is certainly the most notable agent of the unity of science.

But what sort of mathematics are we considering ? Is there on the one hand a domain of applied mathematics subserving the other disciplines, and on the other one of pure mathematics, haughtily independent, interacting only tenuously with the first ? Not at all. Applied mathematics is in fact whatever mathematics a scientist in this or that other discipline has managed to assimilate.

Some physics teachers may complain that his pupils are being taught "useless mathematics". But very often the mathematics taught them is only "useless" because the practising physicist knows nothing about it and would therefore never think of using it. The range of "useful" mathematics is subject to abrupt shifts over the years according to the problems occupying the scientific community and according to that community's actual mathematical education.

Of all the sciences mathematics is perhaps the only which has evolved most during the last century as regards its interests, its objects and its methods of approach alike. From about 1830 onwards, mathematics entered upon a process of taking systematic stock of itself which has enabled it at one and the same time to get nearer to its ambition of coherence, to realize the limits set to that ambition, to offer the possibility of notable economies in thought processes and to enjoy a degree of power out of all proportion to

what it had in the past. What we might call "the traditional mathematical disciplines" have been transformed into a unitary discipline of mathematics, our contemporary mathematics which might be characterized in the following terms : that instead of conforming to the mathematical structures and identifying them more or less by chance, modern mathematics has made an effort to dominate them.

But any new scientific advance, indeed the mathematical advance itself, is not confined to the acquisition of new knowledge ; it offers us an altered vision even of what we already have and forces us to a painful reformulation of the concepts on which we had been operating. A new scientific thought thus offers us a restructured past, as well as a future to build.

The consequence of all this is that the problems of mathematical education are among the most important and the most difficult posed by science teaching. They do not simply affect the future professional mathematician, but are also of prime concern not only to the physicist and the engineer, but to the economist and the sociologist as well.

All too often still mathematics as taught is dissected like a dead specimen or exhibited like a work of architecture, in finished and final form, and good minds not infrequently reach the point of wondering if it is still possible to do any creative work in mathematics. This last query, I feel, passes judgement on the teaching. It looks as tough we need to avoid like the plague all mathematics teaching of the historic type consisting in the juxtaposition of heterogeneous slabs from different epochs, one reflecting the mental outlook of Greek science, and the rest that of the 17th Century in Europe. We need to retemper all of it in the fire of the contemporary spirit. Let me make myself clear : the history of science generally and of mathematics in particular are invaluable disciplines for one and all, but by themselves they cannot possibly be the foundation of mathematical education. It is the state of mind of modern mathematics which we must have our children taught to share, to spare them difficult and unnecessary deconditioning.

This is not at all easy. It is undoubtedly more comfortable to continue conscientiously with a traditional teaching method "run in" by centuries of experience ; though in any given class it has failed, very often, to catch the interest of more than a small fraction of the pupils.

Modern mathematics teaching calls for all the teaching talent and skill of the teachers and it is encouraging to see that since 1945 there have been individual pioneers or centres all over the world "on the job". The aim of "New Trends" is to provide a link between all those who are, or who would wish to be, concerned in a task as essential as it is absorbing. We realize only too well all this first volume's faults of one-sidedness, incompleteness and imperfection. Its primary aim is to demonstrate its own existence and to serve as invitation to all who might be willing to contribute to subsequent volumes. It consists mainly of miscellaneous articles under two heads : papers read at seminars on mathematics teaching, and original articles or reprints. To complete the volume there are the beginnings of a reference section which

will expand in subsequent volumes - a list of symposia on mathematics teaching, a first list of journals relating to the subject and of "centres" trying to study and thrash out the problems of mathematical education. These "centres" may vary in status from informal groups round a leader to centres proper in the shape of recognized entities.

I appeal to all concerned with mathematics teaching to forward to the secretariat of the journal "L'Enseignement Mathématique" (University of Geneva) all useful particular of journals and centres so that the documentation so far collected may be supplemented in each volume.

This volume would never have been published without the countless hours of work devoted to it by Mrs. Krygowska of the University of Cracow, to whom we wish to convey our grateful thanks.

A. Lichnerowicz

President of the International Commission for the Teaching of Mathematics.

SECTION I

CONTRIBUTIONS A DES CONGRES, REUNIONS

ET SEMINAIRES

PAPERS PRESENTED TO CONGRESSES, MEETINGS

AND SEMINARS

1896

QU'ATTEND DE L'UNIVERSITE LE MAITRE ENSEIGNANT LES MATHEMATIQUES A L'ECOLE SECONDAIRE ?

A. Delessert

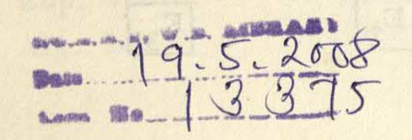
Le texte qui suit est rédigé à partir des notes d'un exposé que j'ai présenté au congrès pour "L'enseignement des sciences et le progrès économique" tenu à Dakar du 14 au 22 janvier 1965. Cette réunion était organisée conjointement par la Commission inter-Unions pour l'Enseignement des Sciences et par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM). L'activité de la CIEM portait essentiellement sur la formation des maîtres.

I. Introduction

Depuis quelques années, de très nombreuses personnes cherchent à réformer profondément l'enseignement mathématique élémentaire. Mais, à de rares exceptions près, les discussions se sont fixées sur les doctrines, les programmes et les manuels. Or ces considérations gardent un caractère très académique tant qu'on ne se préoccupe pas, en même temps, de la formation des professeurs chargés d'accomplir les améliorations préconisées. Aucune réorganisation de l'enseignement ne saurait être considérée comme réaliste tant qu'elle néglige ou sous-estime l'importance du maître. En effet, il est quasiment impossible d'estimer à priori, dans l'abstrait, la valeur effective d'un système d'enseignement. Et cela pour deux raisons au moins :

i) Aucun dispositif scolaire, si mauvais soit-il, n'empêchera un bon maître de faire partager son enthousiasme, ni un élève intelligent et curieux d'apprendre de bonnes mathématiques. (Les grands mathématiciens d'aujourd'hui ont été formés selon des doctrines et des programmes que beaucoup d'entre eux vilipendent journellement). En revanche, malgré les meilleurs livres et les méthodes les plus ingénieuses, le maître dépourvu de conviction et de connaissances solides dispensera un enseignement triste, laborieux et sans portée sur la majorité de ses élèves.

ii) Les expériences touchant la réforme de l'enseignement mathématique réussissent toutes, systématiquement. Cela tient à l'enthousiasme collectif du maître et des élèves qui vivent ensemble une aventure unique avec le sentiment d'être à la pointe du progrès. Aujourd'hui le terme d'"expérience" désigne en ces matières une réalisation définitive pour laquelle l'impression des manuels a été provisoirement


19.5.2008
13375
STATE INSTITUTE OF EDUCATION

différée en vue de corrections mineures.

Mais, lorsqu'au lieu de borner son attention aux quelques maîtres faisant de la recherche didactique, on s'intéresse au corps enseignant dans son ensemble, on voit se poser le grave problème de la formation des maîtres. Celle-ci doit être envisagée sous quatre angles :

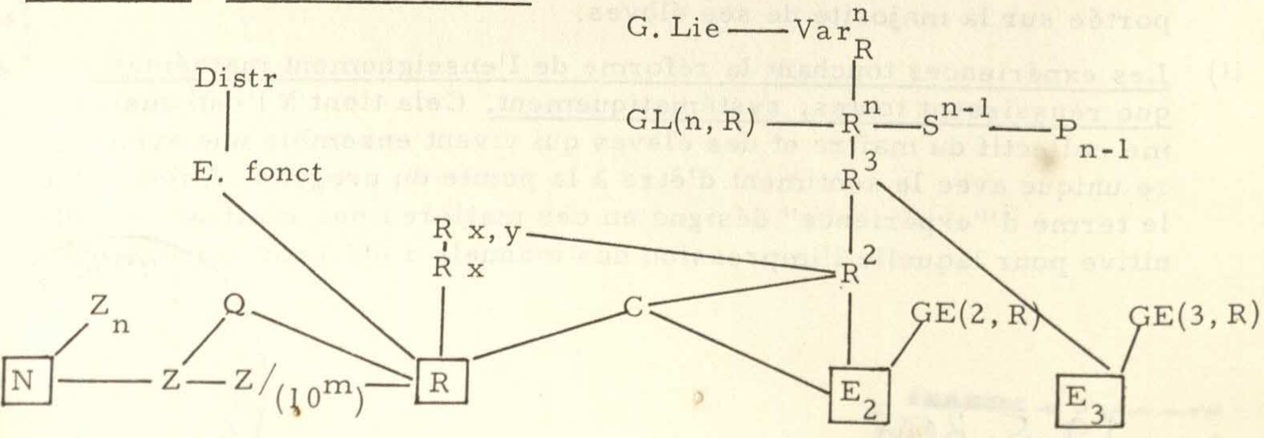
a) L'aspect social : rôle de l'école dans la société ; rôle du maître à l'école, dans la vie, etc.
b) L'aspect psychologique : connaissance de soi, des enfants, des adultes.
c) L'aspect culturel : place des mathématiques dans une éducation harmonieuse ; culture personnelle du maître qui ne doit pas être, aux yeux de ses élèves, un barbare spécialisé.
d) L'aspect technique : d'une part l'acquisition de connaissances et d'aptitudes proprement mathématiques ; d'autre part une information paramathématique touchant l'histoire des mathématiques, les problèmes philosophiques soulevés par les mathématiques, la psychologie du mathématicien, le rôle et la signification des mathématiques.

Bien que ces différents points soient étroitement liés, nous nous bornerons ici à la première partie de d), à savoir la formation proprement technique du mathématicien-enseignant.

2. Brève description de l'édifice mathématique.

Afin d'y voir plus clair, il peut être utile de se représenter schématiquement l'édifice mathématique avec l'espoir -ou la crainte- d'y trouver une division naturelle qui permettrait d'attribuer sans équivoque telle partie à l'école secondaire et telle autre à l'enseignement universitaire. En se plaçant à deux points de vue distincts, on peut faire apparaître ce que nous appellerons l'échelle naturelle et le domaine des structures. Par prudence, nous prévoirons un "résidu" où nous mettrons les objets auxquels le mathématicien est susceptible de s'intéresser, mais qu'il est difficile de faire apparaître même indirectement dans l'un des deux tableaux principaux.

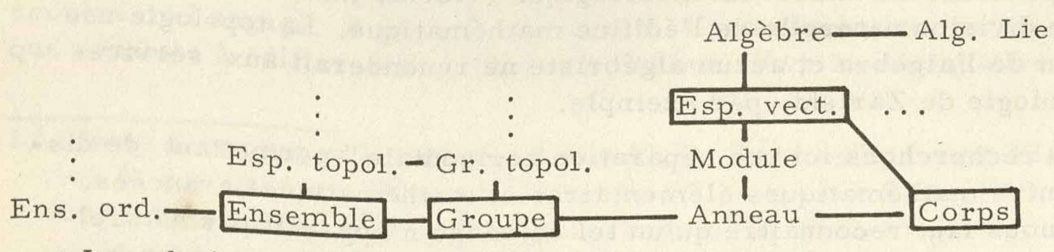
Tableau A. L'échelle naturelle.



On voit figurer dans ce schéma :

N : ensemble des entiers naturels (0, 1, 2, 3, . . . , n, . . .)
Z : ensemble des entiers rationnels (0, 1, -1, 2, -2, . . , n, -n. .)
Z_n : ensemble des classes d'entiers rationnels (mod n)
Q : ensemble des nombres rationnels
$Z/(10^m)$: ensemble des nombres rationnels représentables par des développements décimaux limités (soit l'anneau des fractions de Z par rapport à la partie de Z formée des nombres de la forme 10^m, où m est dans Z)
R : ensemble des nombres réels
E_2 : plan euclidien continu
E_3 : espace euclidien "ordinaire" continu
GE(2, R) : ensemble des isométries de E_2
GE(3, R) : ensemble des isométries de E_3
C : ensemble des nombres complexes
R x : ensemble des polynômes à une lettre x, à coefficients réels
R x, y : ensemble des polynômes à deux lettres x et y, à coefficients réels
R^n : ensemble des suites de n nombres réels, n = 2, 3, . . .
S^{n-1} : sphère réelle de dimension n-1
P_{n-1} : espace projectif réel de dimension n-1
GL(n, R) : groupe linéaire réel complet de degré n
Var^n_R : classe des variétés réelles de dimension n
G. Lie : classe des groupes de Lie
E. fonct : classe des ensembles de fonctions à valeurs réelles, définies sur des parties non vides de R
Distr : classe des distributions

<u>Tableau B</u>. <u>Domaine des structures.</u>



Les abréviations figurant dans ce schéma signifient :

Ens. ord. : ensemble ordonné
Esp. topol. : espace topologique
Gr. topol : groupe topologique
Esp. vect. : espace vectoriel
Alg. Lie : algèbre de Lie

C. Résidu.

a) Notions et questions logiques.
b) Etude des fondements.
c) Problèmes actuellement inclassables (comme, par exemple, celui-ci : existe-t-il un chiffre qui n'apparaisse qu'un nombre fini de fois dans les décimales du nombre π ?), etc.

Il convient de souligner que les tableaux A et B ne sont ici qu'ébauchés. En outre, même si l'on fait abstraction de la partie résiduelle C, la réunion des tableaux A et B ne donne pas une vue complète de l'édifice mathématique. Ainsi, par exemple, la notion d'espace métrique (muni d'une distance réelle) n'apparaît ni dans l'un, ni dans l'autre. Dans le domaine des structures, il convient de l'imaginer à proximité des espaces topologiques. Mais, par ailleurs, elle emprunte certaines de ses propriétés à R et par là touche à l'échelle naturelle. On peut dire que les tableaux A et B sont comme des projections complémentaires de l'édifice mathématique ou, si l'on préfère, que celui-ci résulte du produit des tableaux A et B.

3. Observations sur les tableaux A et B.

a) Les tableaux A et B ne sont pas essentiellement indépendants.

En effet, les liaisons figurant dans le tableau A symbolisent des procédés de construction canoniques élaborés dans le domaine des structures. Réciproquement, une structure n'apparaît dans le tableau B que lorsqu'elle possède suffisamment de modèles intéressants dans l'échelle naturelle. A ce propos, il est opportun de répéter qu'il n'existe que bien peu de notions mathématiques qui ne soient pas préfigurées dans N, R, E_2 ou E_3 et les objets qui s'y rapportent directement.

b) Les tableaux A et B sont monolytiques l'un et l'autre.

Passons rapidement sur un clivage "vertical" comme celui qui consiste à distinguer entre propriétés algébriques et propriétés topologiques. Il présente un intérêt méthodologique évident, mais ne correspond pas à une division naturelle de l'édifice mathématique. La topologie use largement de l'algèbre et aucun algébriste ne renoncerait aux services de la topologie de Zariski, par exemple.

Nous recherchons ici une séparation "horizontale" permettant de distinguer entre mathématiques élémentaires et mathématiques avancées. Et là, il nous faut reconnaître qu'un tel scindage n'apparaît pas naturellement. Certes, on peut noter l'existence de notions simples ou fondamentales (ensemble, espace topologique, R, etc) et de notions composées ou dérivées (espace vectoriel, groupe topologique, $Z/(10^m)$, etc). Mais bien des notions fondamentales ne sont pas élémentaires et bien des notions élémentaires ne sont pas simples.

Ainsi, il n'existe pas à proprement parler de "mathématiques élémentaires". Toutefois, pour éviter toute méprise, il importe de souligner un point essentiel. La mentalité du mathématicien formé diffère de celle du débutant 1/. Contrairement au premier, le second a besoin d'ancrer visiblement la théorie qu'il étudie dans l'échelle naturelle. Pour le débutant, par exemple, toute proposition d'existence doit être assortie d'un algorithme de construction. Et il est réconfortant de penser que, placé devant un problème suffisamment nouveau, le mathématicien professionnel se comporte souvent comme un débutant. En bref, il existe bien une approche élémentaire et une étude avancée des mathématiques, mais cette distinction n'est pas le reflet d'une partition naturelle de l'édifice mathématique.

c) Les notions encadrées sont fondamentales.

En effet, ou bien elles sont d'un usage constant dans l'édification des mathématiques (R, espaces topologiques, etc) ; ou bien elles apparaissent dans toutes les applications pratiques (N, R, E_2, etc) ; ou encore elles fournissent des terminologies imagées et des archétypes en vue de théories plus avancées (N, R, E_2, E_3) comme on l'a déjà relevé sous 3a).

Il est remarquable que, les espaces topologiques éventuellement mis à part, toutes ces notions sont traitées au niveau de l'école secondaire, au cours d'une scolarité complète normale.

Pour nous résumer, disons que :

1) si l'on peut concevoir un enseignement élémentaire des mathématiques, il n'existe pas de mathématiques propres à l'école secondaire;
2) le rôle de l'école secondaire dans l'enseignement mathématique est essentiel ;
3) en conséquence, il faut extirper le préjugé suivant lequel un maître de mathématiques est un mathématicien qui a mal tourné.

4. Demandes générales de l'Ecole secondaire à l'Université.

Jusqu'ici le dialogue entre l'Université et l'Ecole secondaire s'est souvent mal engagé. Risquons une image. L'enseignement mathématique consiste à édifier dans l'esprit de chaque élève un exemplaire con-

---

1/ Citons à ce propos la remarque que M. P. Freyd place dans l'introduction de son ouvrage "Abelian Categories", Harper & Row, New-York 1964 : "If topology were publicly defined as the study of sets closed under finite intersection and infinite unions a serious disservice would be perpetrated on embryonic students of topology. The mathematical correctness of such a definition reveals nothing about topology except that its basic axioms can be made quite simple."

forme de l'édifice mathématique. Comme dans toute construction il apparaît des parties caduques -les échafaudages- et des parties permanentes. Du côté de l'Université on a généralement sous-estimé l'importance des échafaudages ; du côté de l'école secondaire on a souvent oublié qu'un jour les échafaudages doivent s'effacer au profit de l'édifice définitif.

Certains grands mathématiciens, écrivant pour l'enseignement secondaire, se sont abandonnés à la virtuosité avec laquelle ils savent imaginer des questions délicates à partir de situations élémentaires. On pourrait croire qu'ils cherchaient à séduire les maîtres secondaires en leur prouvant que les mathématiques d'aujourd'hui réservent au moins autant de casse-têtes sadiques que les mathématiques anciennes.

Dans les cercles de l'enseignement secondaire, on a trop fréquemment abandonné le terrain de la saine didactique pour se confiner dans une attitude "pédagogique" au sens péjoratif du terme. Nous entendons ceci : la démarche correcte consiste à déterminer d'abord les sujets mathématiques qu'il faut étudier, puis à rechercher les techniques d'enseignement appropriées ; le "pédagogue", au contraire, élabore pour commencer des procédés d'enseignement plus ou moins astucieux et se demande ensuite ce qu'il va bien pouvoir enseigner avec cela ; il fabrique alors de pseudo-mathématiques dont le seul mérite est de se prêter de bonne grâce aux méthodes pédagogiques préconçues.

En bref, on a souvent oublié, à l'Université comme à l'Ecole secondaire, que l'on était attelé à la même charrue.

Avec un vif intérêt et une bonne volonté manifestes, les maîtres secondaires sont prêts à recevoir de l'Université une description claire de l'édifice mathématique. Il conviendrait, par exemple, de leur présenter, en plus détaillé, les tableaux A et B dont nous avons parlé et de préciser le rôle et l'importance des parties de ces tableaux qui les concernent directement. D'une façon générale, on voit apparaître les questions suivantes :

a) Parmi les notions traitées au niveau secondaire, quelles sont celles qui sont employées par les mathématiciens et les utilisateurs des mathématiques ? où ? sous quelle forme ?

Ainsi le maître sera mieux à même de juger de l'importance relative qu'il convient d'attribuer à chaque notion.

b) Quelles sont les généralisations naturelles des notions vues à l'école secondaire ?

La réponse à cette question permet de choisir des exposés élémentaires qui se prêtent à de telles généralisations.

c) Dans les mathématiques traitées à l'école secondaire, quelles sont les connexions internes qui se manifestent à la lumière des mathématiques d'un niveau plus élevé ?

Par exemple la théorie des groupes classiques, celle des groupes et algèbres de Lie permettent d'éclairer la géométrie euclidienne.

d) Quelles sont les tendances actuelles en mathématiques ?

Il y a trente ans, on pouvait affirmer que les mathématiques se réorganisaient autour de la théorie des ensembles, de la notion de structure, et d'autres encore. Il est regrettable que l'enseignement secondaire ait mis si longtemps à s'initier à ces nouvelles formes de pensée. On aurait ainsi évité de transformer en révolution ce qui aurait dû être une évolution normale. Aujourd'hui les notions de catégorie, de morphisme sont sans doute appelées à influencer l'enseignement mathématique de demain.

5. Les institutions nécessaires.

Remarquons d'emblée qu'il ne paraît pas souhaitable de créer un enseignement mathématique complet, spécifiquement destiné aux futurs maîtres. En effet, la Faculté des Sciences n'étant pas en principe une école professionnelle, la formation mathématique du corps enseignant risquerait d'être confiée tôt ou tard à des instituts de pédagogie mathématique autonomes. Parmi les mathématiciens, on réintroduirait ainsi, en l'aggravant, une scission dont nous avons vu qu'elle ne correspond pas à la nature des choses. Il y a d'ailleurs intérêt à faciliter les contacts entre futurs enseignants, futurs chercheurs et futurs utilisateurs des mathématiques.

En revanche, dans le cadre d'une formation mathématique normale dispensée par l'Université et partout où cela n'existe pas encore, il conviendrait d'envisager sérieusement les mesures suivantes :

I - Dans les cours mathématiques.

a) Multiplier les exemples d'applications aux problèmes élémentaires.
b) Indiquer systématiquement les situations élémentaires qui servent de point de départ aux généralisations avancées.

Les mathématiciens se sont vu souvent reprocher leur ésotérisme et la coquetterie avec laquelle ils dissimulent les modèles parfois ingénus qui leur servent de guides dans l'élaboration de théories très fines. Nous leur proposons ici d'y renoncer, au moins dans les cours d'intérêt général.

II - Créer un cours sur des "Questions élémentaires de mathématiques vues de haut".

Le matériel nécessaire à alimenter un tel cours ne manque pas ; qu'il suffise de songer aux contributions de Klein, Hilbert, Lebesgue, Choquet, Dieudonné, Artin, Polya et bien d'autres encore.

III - Créer un cours sur les techniques mathématiques des utilisateurs.

Parmi les utilisateurs, il faut compter les mathématiciens eux-mêmes, les physiciens, les chimistes, les ingénieurs, les biologistes, les statisticiens, les architectes, les musiciens, etc. Par exemple, il peut être utile de savoir que, malgré les apparences, il existe quelque parenté entre les notions qu'évoque le terme de "tenseur" dans l'esprit d'un mathématicien et celui d'un physicien.

IV - Créer un séminaire de didactique mathématique.

Par rotation, on y étudierait d'une manière approfondie des questions élémentaires de mathématiques, suivant le plan que voici :

i) Exposé mathématique.
ii) Diverses présentations élémentaires possibles ; comparaisons.
iii) Difficultés d'ordre essentiel.
iv) Exercices ayant un intérêt réel pour la question traitée ou son extension.

Prenons un exemple succinct. Supposons qu'il s'agisse de présenter l'ensemble R x, y des polynômes à coefficients réels et à deux lettres x et y. On examinerait successivement :

i) L'algèbre symétrique graduée $\varphi(R^2)$ sur l'espace vectoriel R^2.
ii) Quelques présentations classiques de $R[x, y]$, sans oublier la séquence suivante : l'algèbre $R[x]$ des polynômes en x à coefficients réels ; l'anneau $Z[x]$, considéré comme Z-module, des polynômes en x à coefficients entiers rationnels ; l'anneau $(R[x])[y]$ considéré $R[x]$ -module ; l'anneau $(R[y])[x]$ considéré comme $R[y]$ -module.
iii) Les confusions possibles entre les notions de "polynômes à deux lettres" et de "fonctions polynômes à deux variables" qui trouvent leur source dans l'isomorphisme de $\varphi(R^2)$ et $\varphi((R^2)^*)$, où $(R^2)^*$ est le dual de R^2.
iv) En plus des exercices classiques fondés sur l'usage des opérations existant dans l'algèbre $R[x, y]$, la composition formelle des polynômes, diverses dérivations, la permutation de x et y, des substitutions linéaires portant sur x et y, etc.

V - Créer des cours et des séminaires de compléments destinés aux maîtres en exercice.

Plus précisément :

a) Consacrer périodiquement, une fois par semestre ou par année, une semaine à des cours universitaires sur les matières évoquées sous les chiffres I, II, III et IV. Les exposés théoriques seraient nécessairement assortis de séances d'exercices. Signalons qu'une telle institution existe déjà, par exemple en Hollande.

b) Organiser, dans chaque établissement secondaire, un séminaire hebdomadaire ou bimensuel auquel participeraient les maîtres enseignant les mathématiques. L'Université aurait la charge de la partie technique: rédaction de textes, composition et correction de problèmes. Dans chaque établissement intéressé, un maître responsable assurerait la liaison avec l'Université de son ressort. (Un séminaire un peu semblable existe actuellement dans le canton de Vaud, centré sur l'Université de Lausanne).

Ces mesures visent deux buts : rendre immorale pour un maître la possibilité de ne plus faire de mathématiques après sa licence ; obliger l'administration à prévoir du temps et de l'argent pour cette information continue des maîtres en fonction.

VI - Créer, pour chaque Université, un conseil mixte Université-Ecole secondaire en vue de l'organisation des tâches I à V.

L'existence d'une telle institution se justifie d'elle-même. Mais en plus, elle permettrait une information réciproque de nature à dissiper bien des malentendus.

6. Conclusion.

La formation continue des maîtres est nécessaire à l'évolution continue de l'enseignement mathématique. Y renoncer, c'est choisir délibérément le régime des révolutions périodiques que nous connaissons : tous les vingt ou trente ans une guerre incertaine opposera les tenants d'une "vieille" école à ceux d'un mouvement "moderne", bataille au cours de laquelle plusieurs volées d'élèves seront réduites au rôle de cobayes.

D'autre part, lorsqu'on néglige l'adaptation continue du corps enseignant à sa tâche, on en est réduit à "conditionner" simultanément maîtres et élèves aux conceptions "modernes". Au lieu d'imaginer des dispositifs assez souples où le maître dûment informé puisse développer

harmonieusement ses qualités propres, on en vient à élaborer des systèmes d'un dogmatisme exacerbé. Plus de variantes possibles, plus de coupures concevables. Tout ce qui n'est pas interdit est obligatoire. Bien des doctrines proposées aujourd'hui frappent par leur intransigeance et leur intolérance, provoquant un sentiment d'isolement et de frustration chez les maîtres qui en sont les victimes.

J'ai d'abord tenté de montrer qu'il est dans la nature des choses que l'Université et l'Ecole secondaire prennent ensemble la responsabilité de l'enseignement mathématique et de la formation continue des maîtres. J'ai ensuite esquissé une organisation qui permette l'accomplissement de ces tâches importantes.

Riex, septembre 1965

André Delessert.

Résumé of the article :

WHAT DOES THE SCHOOLMASTER TEACHING MATHEMATICS AT A SECONDARY SCHOOL EXPECT FROM THE UNIVERSITY ?

A. Delessert

In the vast renewal of mathematical teaching, the training and resources of the master plays a much more important part than one normally believes. This problem forces us to consider seriously the mutual relations of university and secondary school. In the past too many misunderstandings have arisen.

Even a brief analysis of the mathematical edifice shows that it does not lend itself to any natural division into "elementary mathematics" and "advanced mathematics". In other words if we try to conceive of elementary teaching of mathematics, there is no mathematics which can be said to belong properly to secondary education. On the other hand among the notions which are normally treated at secondary school, many of them (such as the real line, the plane and euclidean space for example) contain the essentials of some of the most modern mathematical notions. It is important therefore to renew, in the mind of the university and of the secondary school teachers, the realization of their responsibility in the matter of mathematical teaching. It is also important to reintegrate the mathematics master in his double role of mathematician and teacher.

What are the natural generalizations of the notions met at secondary school ? What use do mathematicians and those who use mathematics make of these notions ? What connections are there between these notions, connections which only appear in the light of more advanced mathematics? What are the actual trends in Mathematics ? In answering these questions, the university can give to the mathematics master the possibility of putting the object of his teaching in its right place in the total mathematical edifice. For this purpose, certain steps are proposed. Some of them are very traditional, but others demand a certain effort of the imagination. The emphasis is placed on the continuous education of the masters. Close collaboration between the university and secondary schools should ensure the harmonious development of mathematical teaching and put an end to the detestable dogmatic quarrels which we know today.

MATHEMATICS INSTRUCTION

Howard F. Fehr

ELEMENTARY SCHOOL MATHEMATICS

In preparing the mathematical sections of this report, cognizance has been taken of the recent movements in Europe and the Americas toward a reform of Mathematical Education. The following references have been consulted and they are recommended as basic studies to be read and used in conjunction with working groups and committees concerned with establishing new curricula in mathematics. Many other references could be given, but the list is considered as basic.

New Thinking in School Mathematics. Organization for Economic Co-operation and Development, 3, rue André-Pascal, Paris, 16e, France (English and French edition), 1961.

Synopses for Modern Secondary School Mathematics, Organization for Economic Co-operation and Development, 3, rue André-Pascal, Paris, 16e, France (English and French edition), 1961.

Modern Trends in Mathematical Education, Athens Conference Report. Organization for Economic Co-operation and Development, 3, rue André-Pascal, Paris, 16e, France (English and French edition), 1964.

Mathematical Education in the Americas. Teachers College, Columbia University, New York, N.Y. 10027 (English and Spanish edition), 1962.

Report of the Commission on Mathematics, with Appendix. College Entrance Examination Board, New York, N.Y. 10027, 1959.

Goals for School Mathematics, Cambridge U.S.A. Report. Houghton-Nifflin Co., New York, N.Y., 1964.

Per un insegnamento moderno della matematica, Report of the Italian Commission. Ministero della Pubblica Istruzione, Bologna, Italy, 1963.

It is maintained that while having special problems of manpower supply, the developing countries must discard any outmoded Nineteenth century programme and follow one similar to that prescribed in this report.

Formal education of children should begin at the age of 5 years, or even earlier. The elementary schools have as their major purpose the education of all children in the fundamental disciplines of language, mathematics, science, the humanities, the arts and physical health. Education at this level cannot be aimed directly at producing future scientists. The aim is to educate all children generally, that is to give them an all encompassing intellectual development (of which each individual is capable), regardless of subsequent aspirations of life careers. In accordance with this goal, the uses and applications of mathematics, the needs of future scientists and humanitarians, the understandings by laymen, the co-ordination of mathematics instruction with that in the other sciences, and the need for articulating elementary, secondary and university study into an efficient continuous programme are the principal factors to be considered in evolving new mathematics programmes.

In the elementary and secondary school, a formalistic-axiomatic study of mathematics does not provide a medium in which this freedom of the mind can be developed. Although it is quite true that some formal structure, with a postulational base and the proof of theorems within the structure, is a part of school mathematics, it is also true that before this structure can be understood there must be a store of experiences of doing mathematics in which concepts, manipulations, and operational relations have been developed and applied. It is only after experiences of this type have been acquired that mathematics as a study of formal structures makes sense.

The viewpoint that arithmetic is only a skill in performing various computations must be discarded as an overall purpose. Of course the facts and skills must be stored into the minds of pupils, but not as a kit of meaningless tools. The tool must be a machine, thoroughly comprehended so as to free the mind of routine work and permit it to concentrate on creative learning.

Arithmetic, in fact all mathematics, is to be learned as a structure of knowledge, and structure is merely logical arrangement of knowledge gained through scientific inquiry. Real learning of mathematics is gained first of all from the physical world by a sequence of intellectual activities -namely observing, generalizing by selecting, abstracting, and then conceptualizing. At all stages of learning elementary mathematics these

activities are demanded.

If a child must come to observe, to generalize, and to abstract laws and concepts which enable him to build efficient skills for future action, it will be necessary to furnish him with situations in which he can carry on these mental activities. Physical objects, and other sensual aids, can be overemphasized, but in general they are too often neglected or despised by teachers who limit their teaching to descriptions and deductions. The teacher who has made more or less use of the sensible world, of string, rubber bands, sheets of plastic, watches, shadows, alignment of objects, grouping of objects (chairs, desks, books, etc.), knows the richness of mathematical situations which they present or suggest.

But in addition to concrete material there is also abstract substance. In every pupil who has had mathematical experiences, there exists a reservoir of mental concepts, which for the pupil are equivalent to concrete material. The teacher can dip into this reservoir of mathematical concepts - of which he should be aware - and combine them as needed in elaborating a new physical situation so as to lead to the discovery of a new concept. It is only in this type of teaching that teachers experience the thrill of seeing the faces of their pupils light up one by one and take on a smile as they say, "Now, I understand".

There still remains the question of what mathematics must be taught in the elementary school. Any mathematics we teach is governed by the collection of concepts and experiences which a pupil has amassed. It must also be adapted to the mental make-up or maturity of the child. But we have the added responsibility of developing the mathematics needed for subsequent study in high school and university, and this mathematics must have the language, concepts, and structure that mathematicians to-day consider to be fundamental. This is the first criterion for selecting the subject matter.

On the other hand, there is a limited time -six years in the elementary school- in which we can give the necessary instruction in mathematics. We therefore need economy and efficiency in our teaching. If we wish to satisfy the modern needs of mathematics, we will have to cast out useless parts, make broader and more general approaches, and use more general unifying concepts which, however, must be within the mental capabilities of youth. This is the second criterion of selection of content.

Finally, we wish to have that mathematics taught that will be pleasing and satisfying -that has aesthetic appeal so as to capture the spirit of youth- to make it truly romantic. This would be the classroom teacher's trump card. This is the third criterion of selection of what

is to be taught.

These three demands are great, and while definite knowledge of actual subject content and its sequential organization that will satisfy the three criteria are not definitely known today, the key to the solution exists. The key is the modern aspect of mathematics based on a language and a set of concepts that have evolved little by little through the efforts of mathematicians during the last fifty years. This modern mathematics is not a miracle but merely the search of the human mind for simple, clear, and broader-based ideas.

Modern or New Mathematics.

The content of Elementary School Mathematics will be in large part that which has been in the curriculum, but it will be taught from an entirely different point of view, with new language, new concepts, and some new symbolism. To this content there will be added some newer concepts and points of view extracted from recently developed mathematics, as well as some traditional mathematics transferred from the high school to the elementary school and thus new to the elementary school programme. The latter content will be mostly geometry from a modern point of view of the nature of space.

The new mathematics lies primarily in the use of sets, operations on sets and on the logical structure of mathematics, all taught in a concrete, intuitive, and informal way. In arithmetic we shall have such new words and concepts as : union of sets, mappings or matching, numeral as distinct from number, order, binary operations, exponent, prime numbers, ordered pairs of numbers, mathematical sentences, and new symbols such as : $<$, $>$, $\neq$, (a, b, c), Venn diagrams and graphs. In geometry there will be developed the meaning and use of ideas implicit in the words : point, set of points, segment, ray, half-line, half-plane, region, convex, simple closed curved, boundary, interior and exterior, measure as distinct from measurement, space figures in space, solids, and the like.

The language used will be clear, concise, clean, and correct instead of that found in the books of several years ago where the language is frequently ambiguous, unclear, wordy and incorrect. There is, however, a danger of over-symbolization and over-abstractness in introducing new content into the elementary school programme, and we must constantly guard against such trends.

The mathematics that must be taught.

The past instruction in elementary school has been one almost of rote learning of the decimal system of numeration and computational

processes in this system. No attention was given to structure and meaning. It is here suggested that only an understandable structure of arithmetic of cardinal and positive rational numbers, with the fundamental properties of the operations of these numbers, should be taught and taught to all children in this manner. This is the way to set the foundation for subsequent study of algebra and the application of mathematics to the sciences.

To give the teaching of an entire structure of a number system is impossible in a short space ; hence the following examples suffice.These will illustrate structure and the "discovery" method. The beginnings or foundations of arithmetic can be initiated in several ways, but in school we shall start with sets, groups, classes, or collections of objects. The name "set" is relatively immaterial at this stage but the idea is all important. Certain sets of objects, where the objects may be different in physical or other properties, have a common property-namely, they can be placed in "object-to-object" correspondence with each other. This property that the sets have in common, e.g. their numerosity, their plurality, their manyness, their strength or their power we call the number of the set. As children study sets of different sizes, they learn to abstract the number property of the set and associate a fixed number name to all sets of the same size. While many children can say the number names in order by rote at this period of instruction, this activity is of little or almost no value in meaningful learning. These groups or collections of objects can be ordered according to their size or their manyness, and the number symbols written in this same order. The number symbols thus become a set, which if used in their order, provide an excellent way to find the number of any other set of elements. Instead of matching one set of objects with another, we match the set of number names in order with any set of objects and the last matching name tells us the size of the set. Thus counting becomes man's way of telling how many. Right from the start we develop the concept of counting as a unary operation which maps a set into the set of ordered number names. We do not tell children to count - we say "count some set of objects".

Each time we add another element to a set we get a new enlarged set, and we invent a new symbol or name for the number of the augmented set. Eventually these names become so many that we create some sort of repetitive system in naming the numbers. We are thus led to a system of numeration. Our system is a decimal, additive, place system, and these three aspects form the foundation of all the computational work of our arithmetic. When these ideas are grasped, there is little trouble in learning the rest of arithmetic. How to gain meaningful knowledge of the

decimal system of numeration is well known. Children who have learned to count rationally by the use of a decimal place system can use numbers intelligently in subsequent experience. When rote learning is primary, children have great difficulty in further learning.

The structure is now extended to include the concept of addition. Physically, addition can be interpreted as the counterpart of combining or joining two sets into one single set. In arithmetic this is construed as finding the number of the combined set from the numbers of the separate sets. Thus addition is based on counting. If children can count, they can add. But knowing what addition is, is not sufficient in the affairs of our lives. We must be able to take a series of numbers, no matter how large the numbers, and find their correct sum efficiently.

This means that certain basic additions must be learned and committed to memory for future use. Since we operate in a decimal system, and since we need to add only two single digit numbers at a time, we need learn no basic additions beyond 9 + 9. With the explicit use of decimal systems of notation and the intuitive use of the commutative and associative laws, children can develop these fundamental addition facts for themselves and then practise them until they are remembered. Children sense that the sum 3 + 5 equals the sum 5 + 3, and that both are 8. To explicitly call this a commutative property at this time of learning is ridiculous. When sums go beyond 10 we intuitively use the associative law. Thus 6 + 7 = 6 + (4 + 3) = (6 + 4) + 3 or 10 and 3 which is 13. Thus the operation of addition is related directly to the decimal system of notation. The extension to the addition of numbers of any size is evident.

Physically, subtraction is related to finding the complement of a set or the set of objects remaining. In arithmetic, it is finding a number from two given numbers one of which tells us the size of a given set and the other the size of a subset removed. That this operation is related to that of addition is not recognized by children at the start, nor need it be. The basic subtractions needed are really those up to minuends of ten, but for effectiveness, we learn the subtractions to 18 - 9 and practice them until they are quickly and easily recalled. The use of the decimal system permits us to extend these basic subtractions to subtracting a number of any magnitude from the same or greater number. Subtracting a greater number from a lesser number is impossible in the arithmetic of whole numbers, and thus subtraction is an operation that differs in its properties from addition. Finally, the operations on physical sets enable us to see how an addition and a subtraction of numbers are reversible operations.

We now build upon our structure to introduce a new operation called multiplication. This operation is quite different from addition. There is a new element, since the multiplier is not necessarily connected with

a given set of objects, but acts as an operator in the following manner. Consider a collection of sets (we could say a set of sets) all having the same number. I shall select a certain number of these sets and combine them into a single set. The corresponding arithmetical operation is called multiplication ; the number of sets which were selected is called the multiplier ; the number of the resulting set is called the product.

Multiplication can also be defined by the Cartesian product of two sets, but this concept of multiplication has no use, place, or validity in the elementary school programme. It should not even be mentioned.

Multiplication can also be looked upon as explaining the result of replacing each element of a given set by other sets, each set having the same number. A concrete illustration is replacing each orange in a half dozen by sets of 7 cents. The result is the product set of 42 cents. This, indeed, is the most common model of multiplication in our every-day life. Again, knowing what multiplication is, and how to add, the child can develop his own basic multiplication facts or so called tables. However, knowing how to do it is not enough. The pupil must practise until he knows all the basic facts by quick recall. The intuitive use of the commutative law helps him since, for example, 9 x 7 = 7 x 9 = 63. Again, in extending multiplication to numbers of any magnitude, the intuitive use of the associate law plays an important role since 20 x 8 is the same as (10 x 2) x 8 or 10 x (2 x 8) or 10 x 16 or 160. Thus pupils can easily learn how to multiply by 30, 40, etc, before tackling such problems as 26 x 234, where the <u>intuitive</u> use of the distributive law plays a large rôle.

The last operation on whole numbers is division. There has been much verbiage about this operation in the past ten years including such terms as measurement, sharing, dealing out equally, partitive, etc. Division can be conceived as the reverse of a multiplication, that is, given a set of objects, partition this set into a number of equal subsets. If the size of the subset is known, we are asked to find the number of these subsets ; and if the number of desired subsets is known, we are asked to find the size of each subset. Under this definition, division is not always possible. There are remainders, not enough to make another subset or to enlarge each subset by one more, that is, our answer does not come out exact. Of course, we treat these remainders intelligently, seeking the relation of the remainder to the dividend when we desire a total quotient, or later, when fractions have been taught, making further subdivision of some of the elements that were given originally so as to provide an exact answer.

Children easily learn the fundamental division facts by relating them to corresponding multiplication facts. In more extensive computation they relate division to subtraction.

The two important elements to this learning of the system of whole numbers are meaning and skill. The meaning is built as an intuitive structure without any formalism or proof, without stressing the difference between number and numeral, for this is fast becoming an undesirable fetish, and with no explicit statement of so-called laws or principles. The distinction between physical operations on sets of objects and the corresponding operations on numbers is made only by insinuation, not as a necessary metaphysical requirement. The skill is built by practice based upon meaning until all children can compute at an efficient adult level. There is not need to hurry or squeeze this learning into the first few grades. If, at the end of Grade 6, almost all children know the decimal system of notation, can read and write the numerals for numbers of an indefinite magnitude, can at an adult level of performance do all four fundamental operations on whole numbers and fractions, both in common and in decimal notation, and apply this knowledge meaningfully to the solution of involved numerical problems, we shall have achieved an outstanding and notable advance in our reform of mathematical education.

This, however, does not mean the end of the study of whole numbers. In good teaching we return to the study of these numbers but always at a higher level of learning and for deeper understanding. Thus the explicit study and statement of the definitions, laws, and principles of whole numbers only becomes important when we aim to build an explicit formal structure. So in Junior High School we restudy the whole numbers formally, using variables and formulas to express the laws, using finite modular systems to exhibit further the type of structure, using place systems of numeration to other bases than ten to illustrate that properties of whole numbers are independent of the notational system, and a few simple new operations that are not commutative or associative.

In the senior high school and the university we return to the study of these numbers as the theory of numbers, first in semi-rigorous form and finally as pure structure where, with the use of algebra and set theory, we can create these numbers that Kronecker attributed to God and see them as the solid base on which almost all mathematics rests today. A similar spirality of learning can be cited for practically all other branches of contemporary mathematics.

These two subjects -structured Arithmetic and physical Geometry of Euclidean Space taught as scientific inquiry form the basis for a secondary school programme.

SUGGESTED SYLLABUS FOR ELEMENTARY SCHOOL MATHEMATICS

The general purposes of teaching mathematics in the elementary school should be :

1. To gain a mastery and understanding of the concepts and computational skills of whole numbers and fractions, including the decimal system of notation, and the ability to apply this knowledge to the solution of problems of ordinary life. This knowledge should serve as a basis upon which to build the study of algebra.

2. To gain an understanding and interpretation of the basic properties of physical euclidean space, and the ability to use this knowledge to solve ordinary problems of a geometric nature. This knowledge should serve as a basis upon which to build the study of geometry in the secondary school.

3. To gain an insight into the relation of space and number through the study of graphs and of measures of length, area and volume.

The Arithmetic Programme

1. Sets - Correct intuitive notions. Subsets, empty sets, unions.
2. Mapping a set into and onto another set. Injections (more, less) and bijections (equivalence).
3. Whole numbers as properties of equivalent sets. Ordering sets and ordering the numbers.
4. Counting as a mapping ; system of numeration ; the decimal system.
5. Binary operation ; concept, set operations, and operations with numbers.
6. The four fundamental operations. The tables to 9.9.
7. The mature algorisms for +, -, . :. Adult efficiency.
8. Theory of whole numbers. Laws of operation, prime and composite numbers ; factors, prime factorization ; divisibility; theory of division ; lowest common multiple ; greatest common factor ; exponents, sentences.
9. Uses of whole numbers - counting, ordering, transforming, calibrating.
10. Fractions - meaning as parts ; as operators ; for calibration.
11. The four fundamental operations on fractions ; equivalent fractions.

12. Fractions and rational numbers. The number line.

13. Decimal notation for rational numbers.

14. Theory of per cent ; theory of measures ; ratio ; proportion.

The Geometry Programme

1. Sets of points ; point, space, curve, line, segment, ray, plane, intersections, simple closed curves, polygons, circles ; regions, interior, boundary, exterior, angles ; rays ; triangle.

2. Common forms ; triangle, quadrilateral, surfaces, sets of points in space ; rectangular prism ; triangular prism ; pyramid ; cylinder cone, sphere ; congruent line segments ; isosceles and equilateral triangles ; right angles ; squares.

3. Linear measure. Comparing sizes ; counting and measuring ; mapping, use of string ; compasses ; measuring a segment ; choice of a unit ; measuring to nearest unit ; standard units ; scales of measures ; other units ; adding measures ; perimeters.

4. Congruence ; review prism, pyramid, cylinder and parts ; parts of a triangle ; fitting figures ; $\cong$ as same size and shape ; congruent line segments ; $\cong$ triangles ; copying angles ; corresponding angles of $\cong \Delta$s; comparing lengths of segments ; copying triangles ; comparing sizes of angles.

5. Measurement of angles ; unit segment ; unit angles , symbolism : $m \angle \theta = 2$; use of unit angle ; protractor ; use to measure and to draw angles ; standard unit, estimating size of angle ; sum of measures of angles.

6. Area ; comparing sizes of regions ; length of curve and size of surface enclosed by it ; region and area ; types of regions - simple, polygonal ; area distinguished from length ; comparing areas and regions ; unit of area ; covering a region with other regions ; area is independent of shape of region ; estimating areas ; using a grid ; standard units ; calculation of rectangular areas ; applications ; areas of triangular regions ; right triangle.

7. Side and angle relationships of triangles. Isosceles triangle ; definition ; construction ; opposite angles are equal ; equilateral triangle, scalene triangle ; measuring angles of a triangle ; sum of the angles of a triangle ; angles of special triangles, 60-30-90 ; 45-45-90.

8. Co-ordinates : locating points on a table ; co-ordinates on a line ; in a plane ; x and y co-ordinates ; finding co-ordinate lengths ; areas of regions changing co-ordinates ; graphs of special sets ; reflections ; symmetry ; symmetry and reflection.

9. Volume : similar to area.

MATHEMATICS INSTRUCTION IN THE SECONDARY SCHOOL
(Ages 12 - 18 years)

In making a modern syllabus, the first step is to select a set of major topics, using some agreed upon criteria for making the selection. If all prejudices are abandoned, this first step will result in the adoption of new topics as well as the rejection of certain others which have been intrenched in our curriculum, as for example a great part of Euclid's presentation of geometry. This selection must be made by persons highly competent in mathematics, for they alone have sufficient knowledge to know the essential and necessary elements that should be included in a modern mathematics programme. Once the topics are selected, they must be arranged in some suitable sequence. However, orderings will proceed from the point of view one takes. Depending on whether one is concerned with :

a) a rational arrangement of topics,

b) the urgency of learning and applying the topics, or

c) the process by which the mind comes to comprehend the topic,

one can consider respectively a logical, a practical, or a psychological order. It is essential that, without requiring too great a compromise, all three orders should be reconciled into a good pedagogical sequence.

To day we are under great pressure to teach more mathematics to students at an earlier age because of the steady growth in the applications of mathematics. At the same time we are more sensitive to the psychology of learning related to mathematics about which, however, our knowledge is limited. These factors make the problem of compiling a mathematical syllabus a very complex one. On the other hand we have a greater understanding and deeper insight into the concepts and theories of contemporary mathematics. It is this aspect of modern mathematics

which places us in a good position to produce a unified syllabus.

When one looks at the structures of mathematics, and senses their great universality, it is clearly seen that mathematics has acquired a unity, largely through the use of set theory. No longer do we think of mathematics as a collection of disjoint branches having no inner relation to each other. We think of it as a set of structures, all intimately related and all applicable to many diverse situations.

Using set theory as a basis, we should build a unified programme through the use of mappings, relations, and functions. Teaching must proceed in this manner, to present an authentic, albeit elementary image of the science of mathematics and to develop the intellectual ability to use mathematics as an instrument in a broader, more deliberate, and more effective way than under traditional teaching.

To achieve this objective, it is not enough to get rid of obsolete subjects, nor to replace them by subjects of a more modern society, nor to graft a few modern concepts onto an outdated programme. School mathematics must be reconstructed by making use of mathematical structures. This means that mathematics will cease to be taught in terms of special properties and skills (hundreds of them) and in the future must be organized around a number of general themes or threads.

...TUTE OF EDUCATION BANIPUR

A proposed syllabus.

In building a genuinely modern programme, we must consider a certain number of key ideas which are essential as unifying elements, and then add others that are of value because of their extensive applications, both pure and applied. In this context sets, mappings, relations and functions are fundamental to the study of all mathematics - they are unifying elements. Basic to all secondary-school mathematics are the algebraic structures, group, ring and field, and the algebraic-geometry (or geometric algebra) structures of vector spaces and linear algebra. The calculus, probability and statistical inference and some mathematical theory relating to computers provide a fitting and satisfying climax for the secondary school programme. At all times instruction should be centered on, and headed toward, the development of vector spaces.

Not only do these topics provide for the needs of those who will use mathematics, but most significantly, they provide the substance for a complete general or liberal arts mathematical education which the secondary school must provide in the future. Vector spaces, the mathematics of continuity, limits, and the calculus, are so universally used in science and technology that there is no need to justify their

importance. The practical and educational implications for teaching probability and statistical inference are great but their importance has not yet penetrated significantly into curriculum planning. It must be re-emphasized that their fields of application are extremely diverse and extensive. Probability represents a complex mathematical model synthetizing much of all the fundamental elements and structures mentioned before. But most important, these branches give an introduction to the concept of "randomness" which students find fascinating, a concept that has unrivalled educational value in the opportunities it offers for the exercise of mental agility and creativity.

Two other topics are assuming a larger importance with regard to contemporary science. These are logic and computer mathematics. The first should be introduced early and gradually in connexion with set operations using one to throw light on the other. In this way the notions and essential elements for formulating statements and definitions, and developing methods for mathematical demonstration can gradually become familiar procedures. The computer finds its greatest value in applied mathematics. The mathematician who works in the applied field proceeds by building models of the situation in the real world. He draws deductions from the models and builds an appropriate mathematical structure, which he subsequently tests against the original situation. The evolution of pure mathematics frequently proceeds along similar lines. The teaching of mathematics should adopt the same pattern, namely confronting the student with situations to think about, build up his intuition, and then proceed to mathematize the situation.

There are persons who would include much more than the general syllabus proposed here. Whatever the next step may be, we must consider the objectives of achieving an extensive comprehension of vector spaces, the calculus, and probability as essential to any programme. The sequence and pedagogy of the curriculum, more-over, should attempt to achieve these objectives economically and efficiently. Some people will want to add to the curriculum more geometry, hyperbolic and complex functions, differential equations, and perhaps more analysis. Before any of these additions are made, their theoretical and practical importance for secondary schools should be properly assessed. It is necessary to adopt a sensible and responsible attitude in proposing any syllabus to see that what is proposed can be done properly, with unhurried calm and with complete understanding. The underlying assumption of the proposal given here is that mathematics organized functionally, under broader and more general concepts, based on the acquisition and use of pervading structures, and taught with clever and psychologically sound pedagogy can achieve, in a shorter period of time than heretofore, mathematical learning of a contemporary and useful nature.

While the proposed programme is intended for college preparatory students in the scientific line, this same programme, modified only as to depth of context and perhaps slightly less extensive, should be offered to the non-scientific student. Especially do these latter students need understanding in the general unifying concepts and the applications of mathematics, and the subject of probability and statistical inference.

A mathematics education of the kind suggested here, depends not so much on the syllabus as on the teacher and the teaching methods employed, for it is only good teaching that can give meaning to a syllabus. Let us make no mistake : any syllabus, no matter how sensible, modern and balanced it may be, can degenerate into mere dogma in the hands of a dogmatic teacher. To learn the generalizations, concepts and structures of the proposed syllabus, a new method of teaching, based on knowledge of psychological structuring of knowledge, must be developed. This method of teaching mathematics will make the learner participate and construct for himself all that is learned. The student must be trained to mathematize a given situation. This calls for the search and recognition of patterns, the assembling of data, an inquiry into the nature of these data, deduction, calculations and interpretation, all by the judicious use of logical methods and mathematical structures studied previously. This method of learning makes as much use of the imagination and guesswork as it does of verification and criticism. It develops ability to cope with the unknown and confidence to use the known. It calls for discovery of knowledge, followed by its organization into scientific categories.

The subject-matter.

In giving a synopsis of mathematics curriculum that is genuinely modern, it is frequently necessary to talk about topics in such a manner that they may be construed as constituting a year - or half-year - of sequential study. This is not the intent of the presentation that follows. All the topics are to be introduced early in the programme and extended broadened and deepened in the succeeding years of study. So we consider only the scope, or the amount and type of mathematics that constitutes the programme. No sequence is indicated, and in fact there can no doubt be a number of quite different sequences, each efficient and effective in obtaining the goals described before. These sequences must be obtained by classroom experimentation in subject-matter organization and pedagogical procedures.

1. Sets.

The naive understanding of Set Theory is basic to the comprehension of today's mathematics. Anyone concerned with the modernization of instruction in mathematics must recognize that, in general, the basic educational considerations must be the basic concepts of mathematics itself - and these concepts are those of set, relation and function.

a) The subject-matter should include descriptions of sets ; elements belonging to a set ; equality of sets ; subsets of a universal set (finite) ; and the set of subsets of a set ; the empty set ; Venn diagrams ; and the determination of a subset of E, by a condition in one variable x belonging to E. This part of the study of sets should terminate with a discussion and consideration of the Equivalence Theorem - that is the application of an equivalence relation over a set of E. Right from the start such symbols as $\in$, $\emptyset$, $\subset$, A = (x : x has property P), and P(E) should be introduced and used consistently.

b) The Algebra of Sets is also important. A fairly rigorous understanding of the operations on sets and proofs of the properties of these operations can be given. This applies to union (A U B), intersection ($A \cap B$), difference $A \setminus B$, and corresponding liaison with the respective logical operations, disjunction ($\vee$), conjunction ($\wedge$), and negation A'. The complement of a subset with respect to a universe ($E \setminus A$ or $C_E A$), and the symmetric difference $A \Delta B$ must also be studied. Associativity, commutativity and distributivity (2 laws) should be developed and the binary operations extended to intersections and unions of a family of sets. Obviously, for correct interpretation one must introduce the quantifiers $\forall_x : x \in E$ and $\exists : x \in E$. The product set AXB, extended to a sequence of sets and set functions, will provide the foundation for the study of combinatorial analysis and probability.

2. Relations.

a) The important relations are those called binary, i.e. that relate an element of one set to an element of another (or the same) set. The initial study is on relations of one set to another (students to teachers ; children to seats, etc.). Relations are represented by graphs and by tables. This should lead to a relation as a subset of ordered pairs of the product A X B.. The terms domain of the relation and image of the relation now become important, and this leads to the conditions imposed on two variables, xRy, which determine a relation in the product set A X B.

b) The fundamental work on relations can be followed by discussion of the reciprocal of a relation, the composition of two relations, and the study of fundamental relations (reflexive, anti-reflexive, symmetric, anti-symmetric, transitive and non-transitive). This permits the development of the equivalence relation ; the partitioning of a set ; the quotient-set ; the equivalence classes. Finally, the relations of order, including strict order, partial order, total order ; and well-ordering should be studied and illustrated.

3. Functions.

The concept of mapping is basic in the study of sets, relations and functions. It pervades the entire study of all mathematics. Strictly speaking, (à la Bourbaki) a functional relation is more than a mapping although all mappings are functional relations. Very early the child should be taught a functional relation of a set F over a domain E. ($f : x \in E \rightarrow f(x) \in F$). Here variable, domain and range are introduced. This should be extended to the images of subsets of E for the functions $f(A)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$ which becomes of great importance in the study of probability. The functional notation should be introduced so that operations can be defined as functions. The partitioning of sets should be related to the quotient set determined by a function. A study of the mappings called injections, surjections, and bijections leads to the examination of reciprocal of a function and the inverse of a function when it exists. This is extended to compositions of functions, where the non-commutativity property really becomes important.

The study of functions is extended to a study of groups of permutations which are bijections of a set E onto E. The consideration of equi-potent sets (the class of equivalent sets) gives rise to cardinal number. Perhaps as a climax one can study isomorphisms and homomorphisms of sets structured by relations or operations.

4. The set of cardinal numbers (or natural numbers)

With an elementary understanding of sets, relations and functions, one can begin a formal study of the number systems. The natural numbers are the cardinal numbers of finite sets. These numbers are represented both in decimal and binary systems of numeration. The importance and efficiency of the binary system in the study of addition and multiplication are defined in terms of the union and product of sets, and the usual properties including that of total order are developed. At a later stage mathematical induction is introduced and in the final year of study, Peano's axioms may be presented.

Division as a reciprocal operation leads to division with a remainder from which the ring of classes of remainders modulo n can be studied. Then one studies divisors, prime numbers, factorization, relatively prime numbers, greatest common factor and least common multiple, always in relation to the operations of union and intersection on the set of principal factors of the numbers involved. This study leads to combinatorial analysis, that is, the study of permutations of n objects r at a time ; the combination of n things r at a time ($r \leq n$); the number of subsets of a finite set, and the use of tree diagrams.

5. The line and the plane.

The line and the plane are studied as sets of points having certain properties. Lines are first considered certain subsets of the plane. Axioms of incidence and parallelism are presented. Parallel lines are coincident lines or disjoint lines. A direction is an equivalence class of parallel lines. This is followed by parallel projection. A parallel projection of one line onto another is always a function that is monotonic increasing or decreasing. The axioms of order (assuming the real numbers) can be given for each line, then half line (rays), segments, and convex set can be taught. Dilations (stretchings and shrinkings) can be considered as bijections of the plane by mapping one line on a line to which it is parallel. This leads to translations and the group of vectors (arrows at first) considered as equipollent couples of points. The plane can then be furnished with an origin, and vectors considered as ordered pairs of real numbers. Finally, one can show the isomorphism of centered vectors and so-called classes of free vectors.

6. Groups.

The most important algebraic structure is the group. After the student has been exposed to sets, numbers and points, he has at hand a sufficient number of illustrations to make a more formal study of this structure. All these examples should be studied as a single structure. One can introduce the additive group of integers (Z, +) ; the group of bijections of a set on itself, the group of permutations of a finite set , and the set of displacements (translations) of points in a plane under addition. All of these examples lead to the definition of a group (G, o) with an internal law of composition which is associative (and sometimes commutative), having an identity element and a symmetric element for every member of the group.

7. The Ring of Integers.

A study of the group (Z, +) in connexion with a scaled line gives an order relation on the line. Then multiplication of the integers furnishes the ordered ring ($Z, +, ., \leq$). This leads to the algebra of integers which becomes basic to the study of polynomials. The solution of equations $x+a = b$ or $x+b = a$ show the distinction between the possibilities of solutions in the cardinals and in the integers.

8. The line and the ordered field of real numbers.

The ordered field of rational numbers as classes of quotients of whole numbers (divisor $\neq 0$) leads to the properties of a field. Using the line with an origin (zero) and a unit point, the rational numbers can be used to graduate the line. Using many successive sub-divisions of an interval, the axiom of Archimedes is introduced. In this way (using binary or decimal division) we can develop a finite representation for some rationals, and infinite representation for others. By an axiom of continuity we can introduce the binary or decimal representation for any real number. Thus the real line and real numbers are established simultaneously and their properties can be studied.

9. Numerical calculation.

Now the study of the four operations on real numbers by the use of rational approximations can be studied. The study of absolute and relative errors of the results, and the corresponding theory of significant digits in operation on numbers makes use of scientific notation. This leads to a study of logarithms, arithmetic sequences, geometric sequences and the isomorphism $G \rightarrow A$. Then a logarithmic function can be defined over the geometric progression G. The nature of a base, logarithms to base 10, the calculation of logarithms and finally tables and the use of logarithms in numerical calculations round out this particular study. The nth root of a positive real number relates the study of radicals with that of exponents. The isomorphism of the multiplicative group $(R+, . ,)$ of real positive numbers, and the additive group $(R, +)$ of real numbers serves as a climax for this topic.

10. Polynomials having real coefficients.

First, polynomials in one variable are introduced, and then polynomials in several variables. The numerical value of a polynomial leads to the polynomial function of the reals into the reals. The properties of the ring of polynomials are studied, especially divisibility by $x - a$. This leads to factorization and the zero's of a polynomial. This study concludes with the solution of the equation of the second degree in one variable and inequations of the first and second degree in one variable.

11. The vectorial plane and affine geometry.

The global way to teach geometry is via the affine plane to the Euclidean plane, then on to three-dimensional vector space and n-dimensional space. The easiest approach is through the group of plane vectors under addition, first with free vectors and then bound vectors in a co-ordinated plane. If these vectors have induced on them the multiplication by a real number we obtain a real vector structure $(R, V, +)$. With the plane furnished by an origin we can introduce Cartesian

and vector equations for a line in two-variable as well as the parametric form. This furnishes all the equipment needed for the solution of systems of equations and inequations of the first degree in two or more variables, calculation with determinants and matrices and linear programming. To conclude this part of affine geometry we can study the affine properties, especially those of translations, central symmetries, homotheties, axial symmetry and affinities by parallel projection.

12. Euclidean metric geometry of the plane.

The relation of perpendicularity - introduced by axial symmetry or folding-leads to a study of congruence and isometries. The group generated by orthogonal symmetry of a line of the plane leads to the study of translations, rotations and reflections. Then we can introduce the notion of rigid motion as a euclidean transformation. The angle can now be studied.

Perpendicularity and parallel projection give us means of scaling every line in the plane so as to preserve distance. The distance formula, the cosine of an angle, and the scalar product of two vectors give us the Pythagorean theorem, and with it the triangular inequality which later can be extended to the Schwarz inequality for n-dimensional space. The circle can be studied at this time.

Now a perpendicular base for plane vectors can be established, and the trigonometric circle (wrapping function) studied, leading to the trigonometric functions of an angle or a real number and the fundamental trigonometric formulas. The study can conclude with the traditional analytic and vectorial treatment of the conic sections.

13. Descriptive statistics.

First we study a set statistical data (a population) partitioned into classes with their frequencies. A study of the graphs (histograms) and cumulative frequencies (ogives) can be made in relation to a statistical variable. The various graphs lead to the nature of statistical distributions, from which we derive the particular properties - median, mode, arithmetic mean, quartiles, deciles, standard deviation, and the nature of descriptive statistics. As a climax we consider statistical distribution of two variables over the same population, a correlation graph and fitting a straight line to obtain linear regression.

All the study outlined before should be completed by the end of the tenth school year (that is in four years of study). Time does not allow for an extended outline of the global programme for the last two years of the senior high school, so I shall merely list the topics.

In the eleventh year, we capitalize on all that has been previously learned by reviewing it in a more formal attire. The content should include :

14. The plane and the field of complex numbers
15. A formal study of groups, rings, and fields
16. Vector spaces (linear dependence, matrices, solutions of systems of linear equations)
17. Affine co-ordinate geometry (see Levi)
18. Euclidean geometry of space (by co-ordinates and vectors)
19. Probability of finite sample spaces

The twelfth year should include :

20. Metric space and simple topology (open spheres, neighbourhoods, distances)
21. Continuous functions (continuity at a point, over an interval). The limit of a function at a point.
22. Differential calculus
23. Integral calculus
24. Simple differential equations. Probability extended.

This programme is then a global one that will prepare scientific students to enter the university ready to engage in serious and rigorous mathematical study, and with a background to engage in the study of the physical and behavioural sciences without any deficiency of the mathematical knowledge now employed in the university presentation of these subjects. The question of whether a sufficient number of students between the ages of 12 and 19 years can do this programme has been answered positively by a few countries who have dared to move forward. How it can be modified so that the majority (or all) of college-bound youth can profit must yet be determined by experiment.

Modifications for Mass Education

The mathematics programme outlined above is a strong one, and is intended for those secondary-school students who are capable of, and have a strong interest in scientific study. This group comprises from 3 to 5% of the total population of 18-year olds. Another 5 to 10% of this age-group will also complete secondary school and enter university study, but in other lines than the scientific. They should follow the same programme as outlined above, modified only as to depth and complexity, and with more practical applications included in the study.

There is a great middle group of intellectual ability, those who will complete some form of secondary school and perhaps enter some form of post-high school career training, of which we have not yet spoken. They will comprise the upper 70 to 75% of mental ability or cognitive intelligence. This is the great mass of society which consists of semi-professional workers, technicians, operators, practitioners, repair men, installation and operational personnel - those who must be trained and from time to time retrained, to put technological creation into daily operation. The question, and a serious one, facing schools in all countries is the type, quantity and quality of mathematical education these persons should receive.

At the start we must distinguish between training and education for these students. Training is conceived as constricting the mind to think, and the body to operate, in a given way. As long as a social culture remained static for a generation or longer, and one learned to perform a given task or service for the rest of his life because it was a necessary and serviceable task required of society throughout his working life, such an activity could be rightfully accepted as a duty of schooling. Hence we had vocational schools, technical schools, business schools, and career schools of all sorts of types, in which the student learned mathematics related to his field, for example, business arithmetic or mathematics, carpentry mathematics, mathematics for electricians, and so on. Most of these courses were rote applications of formulas, rules and computations to specific tasks or examples. The pupils did not really know what they were doing - they only applied what they were taught in the way they were taught.

Education, on the other hand, is conceived as liberating the mind, freeing it to ask questions, to seek other solutions, to look for new relations, to adapt one's thinking and self to new conditions. In the present explosion of knowledge, of technological advance, and of rapidly changing culture, it is necessary for the great mass of people to learn how to change, how to learn new skills, how to readapt itself to the changes in the economic, engineering, industrial and technical activities that literally are changed every year - not every generation. Such adaptation demands that the schools educate the masses, and permit industry and business to train and retrain its own employees to their particular tasks. We must educate so as to permit our graduates to adapt themselves to a life career of retraining.

This means that the mass of people must study the same mathematics, in the same meaningful and structured manner as the college-bound students study the subject, but - adjusted to their rate of learning, their mental ability to make abstractions and deal with complex ideas, and

their need for many concrete examples and applications of the mathematical concept. They learn the same mathematics - but not as much, not as abstract, and at a much lower rate. All such special vocational courses as business mathematics and the like mentioned above should be relegated out of the schools and into the industrial and business on-the-job training.

Since the careers of this group lie in the operational and service side of all that technological theory creates and industrial and business engineering puts into use, they have need to understand the basic principles on which mathematics is built. So they must understand relations and functions, as exhibited by graphs, formulas and tables ; of variable, and domains as exhibited by the simple algebraic structure ; of the nature of space as exhibited by co-ordinate geometry and vectors ; of periodic phenomena as exhibited by the trigonometric functions of real numbers and angles, and of the properties of discrete and continuous physical reactions as exhibited by the summation of terms, the derivative and the integral. All of these parts of mathematics can be taught in a less than axiomatic structure, with many physical illustrations, so as to give a fairly comprehensive picture of what the fundamental concepts of mathematics are - sets, mappings, relations, functions ; how they form simple structures of thoughts - number systems, polynomial ring, solutions of open sentences, field structure, and simple vector spaces, the latter almost entirely from a physical geometric point of view.

With this knowledge, this group of students can be trained in almost any modern institution, not only to perform the present manner of operating on a particular job but to readapt their performance to new technics, to new procedures as they are introduced. The programme should be the same advocated above for the lower cycle (7-10) of the secondary school, but spread out over the entire cycle of secondary school (7-12). It must be extended to the post-high school junior college study (13-14) as time demands more knowledge. All countries should initiate experimental courses of the nature of the subject-matter proposed to be given to this great mass of students, on whom future society must depend for the maintenance of its economy.

There remains another group of society for which no mention has yet been made. They comprise the lower 30% of the academic ability and indeed the lowest 5% may be non-educable - only trainable. It is still an unanswered question as to whether or not this group can really learn mathematics, that is, really come to comprehend the nature of number, variable and space. That they must know, and can learn a minimum amount of computational arithmetic and physical geometry we are aware, but the role they will play in our present and future society is a low-level manual service, and one in which mathematics per se, will be of no significant value.

THE TRAINING OF TEACHERS OF MATHEMATICS

In order to ensure a good programme in mathematical education, there must be a sufficient supply of teachers adequately trained both in subject-matter and in matters of pedagogy. Today the supply of these teachers is far from meeting the demand. We must seek to have more persons become interested and scholarly-minded to enter the profession of teaching mathematics. As a source of information for the study of this problem, the following reports may be examined :

The Supply and training of teachers in mathematics. A report for the Mathematical Association. G. Bell and Sons, London, 1963.

Recommendations for the training of teachers of mathematics.

Course guides for the training of teachers of Junior High and Senior High School mathematics. The Committee on the Undergraduate Programme in Mathematics (CUPM) ; Mathematical Association of America, Buffalo, New York, 1961, 1962.

The Düsseldorf Programme. Students' European academic record booklet, University of Münster, Westfalen, Germany (The University programme in mathematics).

Mathematics to-day, a guide for teachers. Organization for Economic Co-operation and Development, 3, rue André-Pascal, Paris, 16e. France, 1964.

The teaching of a modernized programme in mathematics makes quite different demands upon the teacher than did instruction in traditional programmes. Not only is there required a completely new orientation toward the nature of mathematics, but also a more global approach in methods of teaching the subject. In addition, the steady increase in mathematical knowledge at advanced levels, and with the increase a necessary shift in patterns of organization of the school content, both demand a teacher who is continuously a student of his field of endeavour.

Before we attempt to set down the level and scope of the knowledge which it is desirable for a teacher to have, it might be worth recalling a few guiding principles.

1. Basic principles.

There are many degrees of knowledge one may have of a mathematical theory :

a) Total ignorance, not even knowing that the theory exists.

b) A knowledge of the name.

c) A knowledge of some of the problems involved and the method used to solve them.

d) A knowledge of the structure of the theory, its different ramifications, its successes and any outstanding obstacles.

e) Familiarity based on considerable practice.

f) Absolute mastery.

g) Not only absolute mastery but full realization of any difficulties it may present to those seeking to study and assimilate it.

It would seem very reasonable to expect the teacher to have reached (g) as regards any of the theories he teaches.

2. However, a mathematical theory is never a limited collection of ideas and theorems ; it is primarily a way of manipulating certain concepts, a way of thinking which can be applied both to very simple cases and to very complex situations (where a teacher's first duty is to reduce everything to simple terms). It is arbitrary to regard any theory as complete as it always has ramifications which it would be equally arbitrary to separate from the theory itself and which, in most cases, serve to throw a very useful light on the theory.

We may conclude that a teacher's knowledge cannot possibly be limited to what he teaches, that it is not sufficient to have a good knowledge of his instructional subject and that he cannot know it really well unless he knows a good deal more than he shall ever be called on to instruct.

3. But the need to train teachers to have an absolute mastery over the subjects they teach and, therefore, a far greater knowledge than the pupils, is diametrically opposed to another need, born of the age in which we live, i.e. the need to train many teachers and sometimes to train them quickly.

4. A distinction must be made between university and post-university training (The "continuous training of teachers".)

The second is essential if the teacher is to deepen his own education and not allow his mental faculties to become sclerosed. It must als

be provided by the university with which all teachers must remain in contact and it must provide a supplement to the training the teacher received when he was a student. But if it is dangerous to imagine that this training can never be adequate, it would be still more dangerous to try to gain time by relying too much on continuous training to achieve a satisfactory standard. It must be emphasized that there must be a basic foundation on which the continuous training can be carried out without demanding disproportionate efforts. All educational planners in each country must be clearly informed of the very grave danger of reducing the duration of the basic training of teachers.

5. It is convenient to divide the secondary education and initial university education into several stages.

Disregarding any differences which are not substantive, the secondary school mathematics curriculum may be divided into :

A lower secondary cycle (children from 10-11 to 14-15)

A higher secondary cycle (pupils from 15-16 to 18-19).

At the university there are two stages roughly corresponding to the two levels of the Düsseldorf programme. This suggests the following tentative principles :

The basic training of a teacher responsible for the lower cycle of secondary education would be the training received through the first three years of study at the university.

Supplementary comments :

In the training of teachers two matters of equal importance are : (1) the knowledge given to future teachers and (2) the manner in which this knowledge is given. At the university all too many professors are content to give impeccable but cold expositions in which the deep underlying purposes of the study escape the students. The manner in which the students come to know the subject-matter must be given as deep consideration as the knowledge they are to learn.

In the great surge of interest in mathematical studies, there has arisen a situation in which two great demands are present which, in a sense, oppose each other. The one demand is for excellence on the part of the teacher both in mathematics and instructional skill. The other is a social and political demand for more teachers trained at a faster pace and less advanced level. To meet both of these demands it is necessary to obtain as much serious study as possible and yet be realistic to give an adequate supply of teachers. It is always possible to extend the teacher's knowledge through continued in-service study.

But we should not use the pretext of possible continued education to lessen in any way the desired basic training. The responsible authorities in all our countries must be requested to safeguard a high-type basic training. At level I (Düsseldorf) it is important that future teachers, engineers, mathematicians, both pure and applied, all receive the same mathematical study. If there exist countries which can demand level II for all teachers of the upper secondary school, all the better for them. The purpose of the foregoing proposed was to make concrete suggestions to those countries which cannot at the present make such strong demands.

Generally it is not necessary to limit the instructional training for the secondary school level to just two levels. England now has three -the United States of America has proposed four levels- Germany has only one level of training for all gymnasium mathematics teachers, which involves eight semesters of study of mathematics but which usually requires twelve to fourteen semesters for completion, which is considered to be too long a training period. For the teachers in the middle school, however, only six semesters of study are required. In several countries future teachers are required to teach two subjects, so that the training of teachers cannot be limited just to mathematics. It is also important not to isolate mathematics from other allied subjects, especially in the training programme of secondary-school teachers.

Since not all countries can immediately reach even level I of the Düsseldorf programme, it appears quite necessary to define more than two levels, setting forth strictly the knowledge required at each level of training. It is also an expedient policy to make the levels sequential to the extent that it will be possible for a teacher to pass from one level to the next higher level without repetition or starting on a separate programme of training. In this way certain courses in the level II Düsseldorf Programme could be taken as optional subjects for the first level and thus new teachers could be better prepared for evolutions or changes that are presently taking place in school programmes. We must likewise do something for the slower teacher (and we have them in all countries) so that they can earn a licence to teach over an extended time.

The pre-service pedagogical training of mathematics teachers is recognised as a very important part of the teacher's preparation. There is no agreement on when this year (most persons assumed a year of pedagogical training was sufficient) should be given. The point of view of some countries is that the pedagogical training should follow the four years of scientific training in subject-matter. They argue that students are usually contemptuous of the pedagogy they get and much of this teaching is not directed explicitly to the subject-matter the students will have to teach. It was noted that other countries have various plans of giving the pedagogical training and that no evidence exists to show that either integrated or subsequent pedagogical training gives better results.

The nature of the pedagogical training should be for the most part in the hands of mathematicians who know the difficulties of the subject. It must deal directly with the material (subject-matter) the students will teach and the nature of the pupils at the level they will teach. As programmes of instruction in the secondary school continue to change, the pedagogical seminars should be used to study and compare different proposals, different syllabi, and the different materials in experimental programmes. It will be necessary to know what is being taught at the primary level also, since it is primary-school mathematics that sets the base for what can be initiated in the secondary school.

Very important is the psychological knowledge that is given in the training. It is necessary to understand the child - the average and slow child as well as the more able one. For this purpose, at the secondary level general psychology is of little value to the teacher. The psychology must be that of the adolescent, of cognitive learning, of differential personality, so that teachers can learn how to adapt their instruction to the child. We must be concerned with raising the entire level of mathematical competence and this means the slow to an average level, the average to the better level, and the able to excellence. It is a matter not of producing hundreds of mathematically literate persons, but thousands.

As more and more pupils continue into secondary academic instruction it will become increasingly necessary to distinguish the abilities and interest of these students so that a real distinction appears between the level of instruction to which they are subjected and the teacher training required for each level. In the years ahead we need expert psychological research on the manner of introducing abstractions to children ; the ability of children to make abstractions and use them, and the personality relations between teacher and pupil. In all of this research a guard must be set up against purely metaphysical arguments and conclusions. What is needed is knowledge from scientific experimental situations which will provide operational data to the teachers in the classroom.

Professionalized Training

In the past we have trained our mathematics teachers by teaching them that mathematics was deemed necessary as a background for the mathematics they would teach in the secondary school. It was good mathematics and the intending teacher studied it and mastered it. Having done so they thought they had learned one forever all the mathematics needed to carry on their chosen profession of teaching. The university study of mathematics completed, they studied the necessary pedagogy, did the inservice training as a teacher and then received permanent

certification for life as a teacher of secondary school mathematics. They had no feeling of a necessity for further study of mathematics. For the most part, this situation still exists to day, even though the subject-matter is of a more "modern" variety. However, in this training the intending teachers were never taught how to do self-study of mathematics, how to go on learning new mathematics by using their own intellectual faculties and all the previously studied mathematics they had stored in their minds. Indeed, the self-study of mathematics and the doing of research in mathematics was generally reserved for graduate and Doctor of Philosophy study in pure mathematics where the successful candidate had to learn to become a creator in his own chosen branch of study. Thus self-study and creativity were reserved for the intending future mathematician or university professor of mathematics.

Suddenly, like a bolt of lightning out of the sky, in the sixth decade of the Twentieth century, we have discovered that these teachers carefully trained in good classical mathematics do not know the mathematics we desire them to possess in order to teach a "contemporary programme of mathematical instruction". So we organized retraining courses in newer aspects of the branches of Algebra, Geometry and Analysis, including Probability, which we now ask these teachers to master so that they can teach the new programmes proposed for the secondary school. But we still teach these new programmes in the same old way, as something to be learned, and the teacher will know all he needs to know for the rest of his professional career.

So my first point is that we must now educate our teachers in how to educate themselves, how to continue to study and learn more and newly emerging mathematics and mathematical concepts.

If we succeed in some measure in this type of education then there will be great need for a new kind of textbook - one for self-study by teachers in service. This is my second point. These books must appear from time to time and must always contain something new, or at least an entirely new approach to something already known. One, or at most two, such books a year (they can be short monographs) would be sufficient. They must be directed to the secondary-school teacher who has finished his mathematical and pedagogical studies, that is the teacher who has become permanently licensed to teach mathematics the rest of his life. These teachers are busy people, not researchers, but they do enjoy the subject and the teaching of it. The textbooks created for them must be written by persons who know the limitations of secondary-school teachers.

Three points must be stressed :

1. Each teacher will in the future be called upon to teach things of which he was not informed at the university ; and

2. Passing the university and licensing examination should not be accepted as the end of training for a life career in teaching.

3. The means of carrying on in-service education must be more varied and conducted in a different spirit than that of pre-service training.

Not only must a teacher know the subject in which he instructs, but he must also know and teach its applications and its relation to other fields of knowledge, especially the sciences. We must stress the usefulness of our subject and teach it so it can be used. We must teach the applications of arithmetic to everyday life, not through formalized algebraic procedures but as rich intellectual experiments in seeking numerical relations. The theory of sequences and series should be enriched by applications to compound interest, sinking funds, investments, insurance and annuities. Logarithms and exponents find their real value not in areas under a hyperbola, but in radiation, half-life, growth and decay. A host of problems in physics, astronomy, geology, chemistry, business and space study are available and should be used as we teach our subject.

This makes it necessary for every mathematics teacher to study each of the other sciences to the extent that he knows their major premises, and understands how to use this science to enrich his own teaching of mathematics, as well as to apply mathematics to the science instruction at the level at which he teaches.

A purpose of mathematics in the school curriculum of great value to a limited part of our school population is preparation for the subsequent study of mathematics. More and more the colleges are introducing courses which are modern in content, symbolism and formal presentation and are geared to growth in mathematical knowledge. In Algebra, concepts and points of view quite recently developed have so enriched the subject that at advanced secondary school and college levels it is a completely different type of study (or should be) than that given twenty-five years ago. Geometry, as a university study, has been almost completely arithmeticized through the use of co-ordinates and vectors. For this and other similar reasons, modern mathematics of a suitable sort must be introduced into the high school programme. Thus the teacher must be thoroughly grounded in the contemporary viewpoint of all the mathematics he teaches.

But even more important than the kind of knowledge to be provided is the type of mind we wish to produce. A desirable purpose of formal education is to produce a person possessing freedom of the mind. The student who departs from the high school, and the graduate of the university, must never be a prisoner of his own acquired knowledge.

He must have developed within himself the abilities that enable him to dominate reality. It is not sufficient to have acquired only a set of facts and procedures, called knowledge, which would simply act as blinders on his mental vision. It is essential for the student of mathematics to have acquired the faculty of being able, by his own wit, to learn more mathematics, to solve new problems, to adapt his past knowledge to new knowledge and new points of view ; and above all, it is essential to him to have been liberated from the shackles of authority. To develop this type of mind a teacher himself must have a free mind.

REFORM IN MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION IN DEVELOPING COUNTRIES /1

The material presented in the foregoing chapters has treated the topic of education in the sciences and in mathematics in light of the subjects themselves, their relation to each other, and from a contemporary point of view of the nature of science. For highly-developed countries this exposé can well serve as a guide to continued and future reform of school curricula. However, for developing countries where tradition has held forth and where mass education is now in its initial stages, it is quite evident that an adaptation must be made of both the proposed subject-matter content and the training of teachers. In fact, even new procedures may be necessary in order to initiate a modern type of science education. This chapter proposes some procedures for use in developing countries.

1. Selecting and organizing the subject-matter for instruction.

The actual topics to be taught in a school mathematics programme or a school science programme must be selected by outstanding mathematicians and scientists. They, of all authorities, know the nature and purpose of contemporary science and mathematics. As researchers, they not only see the useful and useless in past accumulation of knowledge, but from a vantage point, they see the direction in which contemporary science is headed, they see the necessary fundamental knowledge, concepts and skills needed to understand and apply this science to the endeavours of mankind and they also can give correct interpretations of the concepts.

That modern concepts should be taught in developing countries should be accepted without further support, for all developing countries must develop their economy - agriculture, industry, technology and research -

1. Some of the material in this chapter was suggested by John H. Gay, Cuttington College, Liberia.

in the most efficient of Twentieth century procedures if they are to take their rightful place among all the nations. Only an international economy, giving the highest standards of living for all nations, can conduce to the welfare of all mankind. Thus, any reform in educational programmes must not travel the path of several hundred years of scientific advancement, but must take up the path at its most recent stage possible.

Once an acceptable large body of knowledge is available, there must be selected from it a feasible scope that can be reasonably learned in the period of formal schooling. This scope of subject-matter must be organized into a sensible pedagogical sequence. In the past it has usually been the case to set up objectives, goals or desired outcomes of instruction, and then build the curriculum around these outcomes. This is purely a societal need procedure. More recently, in the Western world, scientists have ignored such objectives and built a curriculum solely on the inherent structure of a discipline - that is, the objective is merely learning the particular subject.

There is a real advantage in looking at both viewpoints. The economic and social needs of a society can be insufficiently met if one does not see the full potentiality of all the scientific knowledge available, while a complete science education may give to many people far more knowledge than is necessary either to understand the science or to use it. A good median should be developed. Thus the scope and sequence of a curriculum - in mathematics, physics, chemistry, biology, astronomy, or any other science - must be the result of an operational research, that is of a team of mathematicians (or physicists, chemists, etc.), educators well versed in the particular discipline, outstanding classroom teachers, psychologists of learning theory and laymen concerned with the use of the science.

These persons can create a sequence that meets the logical, psychological, practical and esthetic objectives of learning a subject through a compromise that does not prevent the realization of all these objectives. They can create a body of common knowledge that all future citizens of a society should have, as well as an enriched and differentiated body of knowledge for those pupils with special and endowed interests. They can adapt the curriculum to local conditions of supply of equipment and manpower to carry out the educational programme. They can effect a continuous sequence adjusted to the levels of learning ability and the future aspirations and contributions of the pupil as a member of his society.

2. Innovating reform in science education.

Innovation of educational reform will vary considerably from nation to nation depending on many variables. The way of initiating a desire for reform, the entrenched authorities in government and education, the need for science and technological knowledge, the economy, the nucleus of available scholars, and so on must all be considered. Any proposals that are made must be sufficiently flexible so as to be used judiciously and in part. However, any real reform will meet serious drawbacks if there is not at least one leader, a native of the country with some recognition, who takes the initiative and exerts a drive to accomplish a reform of the educational process. This person may be a scholar, a teacher, a member of the government, or one concerned with the industry or economy of this nation, but such leadership lends much force to a successful reform movement. It is well to search for such a leader or leaders, and have the need for reform come from within, rather than from outside pressure ; if the reform is to make rapid progress.

A second concomitant of successful reform is the recognition that a new curriculum and a new teacher-training programme go hand in hand. We must avoid the vicious circle of a traditionally trained teacher teaching a traditional programme so that his pupils become the same traditionally trained teachers. The teacher-training programme involves both the pre-service and in-service teachers and provisions must be made to reform the thinking of both these groups. Let us never have any doubt that the teacher and his knowledge are the key to the realization of any educational objective.

The following steps have been suggested by interested persons and other countries as ways of developing a new educational programme :

1. There should be an initial conference, held in the country or region in which a reform is proposed, to discuss the type and means of creating a new programme of mathematics or any science. Invited to this conference should be :

a) A representative from the Ministry of Education.

b) Several scientists of outstanding recognition in the country, in the discipline in question.

c) Teachers of the discipline, both at the level of instruction and at the teacher-training institution.

d) Consultants who have successfully aided in reform movements in other countries.

These persons at this conference lasting for two or three days should concern themselves with :

a) The need for a reformulation of the curriculum. A look at the present programme

b) A first-hand report of new and successful curricula in other countries of the world.

c) A survey of existing facilities and needs of the local community

d) The establishment of an authoritative committee and outside consultant aids and finances to support the committee's work.

2. The first work of the committee thus appointed should be to establish a pre-writing conference lasting about two weeks to which the following persons should be invited :

a) The committee members (presumably all scientists in the discipline concerned)

b) Educators in the science

c) Teachers in the science at the level of instruction and of teacher training.

d) An outstanding consultant in the teaching of the science.

These persons should be charged to draw up a proposed syllabus and an agenda for producing textual material to teach the syllabus. This would entail the production of desirable outcomes, the scope and tentative sequence and the necessary changes in teacher-training courses in order to ensure good teaching of the proposed syllabus. The final work of this group should be to arrange a writing procedure.

3. The writing of good textual material is a high professional task. Those who have written textbooks know how difficult the work of writing can be. A writing group must, and should, consist to a sizeable part of persons who have demonstrated ability to write in the native language, at the level for which the textual material is to be used. A writing group should consist of 20 to 30 persons who will translate the syllabus into textbooks for the students. Again, the group should be representative of various levels in the science who can critically review all the writing that is done as to its spirit and adaptability.

The writers should be :

a) Professionals in the field of textbook construction

b) Top-ranking scientists

c) Teachers in the training colleges or universities

d) Teachers at the level of instruction of the syllabus

e) Outside consultants who can advise, criticize, construct and generally give sound educational direction to the writing.

4. To test the proposed syllabus and the written material there should be a few pilot classes or experimental classes. These classes should be selected so as to contain students typical for the suggested programme. The teachers should be experienced and specifically trained to carry out the aims of the proposed syllabus. This means that for a four to six week period the scientists and educators should conduct an intensive in-service course for these teachers in which half the time is given to a thorough understanding of all the mathematics involved, from an advanced viewpoint and the other part is given to reviewing the objectives, content and necessary pedagogical procedures of the proposed syllabus and textural material.

Two concomitant activities are necessary as the pilot experimental teaching is carried out. One of these is a continual supervision and review of the teaching - the presentation of the lessons, the reactions of the students, the interest and motiviation to learn the discipline - omissions in the syllabus, difficult and exceptionally easily grasped concepts - and so on. The other is the preparation of tests based on the subject-matter and the desired outcomes which can be administered to the students from time to time and possess a high degree of validity in measuring the learning taking place.

5. At the close of the first semester or first year of experimental teaching there is need to review the work of the year in a highly constructive manner. All the results of tests, the observations, the teachers' reactions and other evaluations of the teaching material should be used by the committee to revise the syllabus and textual materials into a more or less final form for use in an extended number of classes the next school year. To prepare for a national or large-scale adoption of the new programme the next step is to retrain all in-service teachers and to introduce a new mathematics curriculum (involving some pedagogical changes also) into the pre-service training programme of teachers.

6. To accomplish the large-scale adoption of the new syllabus it should first receive official sanction from the Ministry of Education. This is easy if the national committee has been an agent of the Ministry. The syllabus should be published and distributed to all professional persons involved - administrators, guidance officials, scientists, professors and teachers - along with a detailed explanation for the need of a new syllabus and its objectives. Short in-service workshops of duration one to three weeks should be established for the in-service

teachers to give them confidence in teaching the new programme. It is essential that all these teachers be given copies of the textual material. The teacher-training departments involved should immediately inject any new mathematical content and methods of teaching into the teacher-training programme.

7. In this day new knowledge is being created at a rate which causes almost a continuous examination of what we must teach and what traditional content must be revised or discarded. Thus there is the need to maintain a national committee which is not only concerned with the immediate reform of a curriculum but also seeks to keep the syllabus in constant revision to reflect the future needs of the science as they can be forecasted. This committee should maintain its continuity by overlapping terms of its members and not as a permanent set of selected members. New ideas come in usually through the replacement of older members by newly recognized leadership.

In all the reform of the school curricula in mathematics and science, the greatest obstacle is the insufficient supply of adequately trained teachers. To wait until the supply exists would be merely to postpone too long the introduction of modern science into the school programmes. Hence we must look to a "bootstrap operation" whereby at first inadequate training must be accepted, but provisions made (1) to bolster this inadequacy by continued in-service study by the teacher and (2) to gradually increase the years of required training of pre-service teachers so that in a period of years - say 10 to 12 - the newly arriving teachers in the classroom will be adequately prepared and also cognizant of the need to keep themselves in continuous study throughout their professional career. The following suggestions are then of a temporary nature, given to meet an emergency operation and to be amended as greater and stronger professional manpower becomes available.

Stage I

a) In the primary school (school years 1 to 4) the graduate of the secondary school with two months' training in psychology and pedagogy, can be inducted to classroom teaching. This person must of necessity continue his education during vacation periods and eventually by a two year or more return to the campus in teacher training institutions where he will earn a degree in pedagogy.

b) For the intermediate school (school years 5 to 8) a two-year university education in mathematics (including a year of the study of analysis) along with an initial two months' training in psychology and pedagogy is sufficient for induction into classroom teaching. This teacher must continue his education while in service, with an eventual return to the

university campus where he should earn a university degree in Arts.

c) For the higher secondary school (school years 9 to 12) a university degree should be demanded. The students in these grades are already highly selected and they need quality instruction to prepare them for the university college and technical institute study beyond the high school. The teachers should have at least a university degree and the equivalent of a half-year of study in educational procedures related to the secondary school.

Stages II and III.

Within five years after a programme has been initiated, the requirements for teaching should be raised at least to the following levels :

a) For primary school teaching : a two-year normal school or university programme of study, plus a half-year of pedagogical studies.

b) For intermediate school teaching : a four-year normal school, teacher's college or university degree, including required pedagogical studies.

c) For high school teaching : a four year university degree plus a fifth year of graduate study leading to a Master's degree in teaching.

Within a period of twenty years the standards should be raised to ;

Stage III.

a) For primary school teaching : a four-year college programme leading to the degree of Bachelor of Arts in elementary school teaching.

b) For intermediate school teaching : a four-year university degree plus a fifth year of study in the teaching of a discipline involving both subject-matter and pedagogy related to a discipline.

c) For high school teaching : a four-year university degree, plus a fifth year Master of Arts degree in the discipline, plus an additional year of professional study in the discipline and its related pedagogy.

Eventually it would be required that all teachers who have not reached the requirements of Stage III would acquire them by in-service study, vacation period study, or by leave of absence to return to the university to complete the necessary requirements.

All that was proposed in chapters VI and VII with regard to the nature of the programmes for training teachers is equally applicable to the proposals made above.

GENERAL REMARKS AND CONCLUSIONS

At the closing sessions of the Dakar Congress the papers of the working groups were discussed and amended before final ratification. Summaries of the reports were prepared and accepted as flexible directives for future activities in the advancement and improvement of mathematical and scientific education. The following summaries reflect the consensus of the Congress.

Mathematics.

The period of creating separate mathematics courses designed particularly for each trade, vocation or professional careers is past. The courses, called mathematics for electricians, for engineers, for physicists and so on, as used in the past, considered mathematics merely as a tool and not as a structure of knowledge and a way of thinking. It is in the ability to use mathematical structures to mathematize physical and other situations that mathematics makes its greatest contribution to the other fields of knowledge.

The proposed programme, which was approved, is one designed for the next ten to twenty years. Some nations have already achieved it, others are working toward it, and for most nations it remains a new undertaking. The programme is characterized by three words - modern, abstract and application. By modern is meant that the subject-matter reflects the contemporary view on what mathematics is - and what it does. There is some relatively newly-created mathematics in the programme, but most of the modern aspects are the new interpretation and conceptualization of the traditional mathematics.

The word abstract is used in different ways by different persons. Initially it means a system abstracted from a physical situation. Thus, from operations on sets of objects we can abstract a system of cardinal numbers. But abstracted concepts and elements can themselves be used to create new systems - such as groups, rings, fields, categories, functors - and these structures are referred to as abstract because no meaning is to be given the elements involved other than that which they take on by the postulates and derived theorems.

The word application is used in two ways. First, it is used to show how a deductive theory already developed can be used to explain instances of the theory. For example, if the general theory of progressions has been developed, an application is to find the sum of n terms of a given

progression 1, 1, 2, 3, 5... The second case is in applying a mathematical structure to a physical problem and thus to mathematize the physical situation. That is, we build a mathematical model of a scientific structure. This is referred to as applied mathematics.

The three aspects - modern, abstract, applied - are reflected in the following summary.

I. <u>The proposed programme</u>.

a) Elementary school.

Set recognition (only disjoint sets) ; cardinal number a property of a set ; order of the cardinals ; system of numeration ; operations on sets and on numbers ; fractions ; operations on fractions ; equivalent class of fractions ; rational numbers (positive) ; measures ; calibration of a ray (the number ray) ; decimal notation for rationals ; theory of per cent ; extension of the ray to include negative rationals (the number line), practical applications ; the nature of physical Euclidean space ; point, segment, path, ray, line, plane curvilinear figure ; closed curve (common polygons and circle) ; region in a plane and in space ; common solids ; measures of length, area, volume ; practical applications.

b) Secondary school .

Sets of numbers and of points, mappings, relations, functions, the number systems E, Z, Q, R, C and their properties ; the equivalence and order relations ; the algebraic structures of group, ring and field ; the solution of equations and inequations in one and two unknowns over a given field. Simple applications to linear programming, vectors, vector spaces, two and three dimensional geometry, linear algebra, combinatorial analysis, probability, statistics, the calculus, numerical analysis and the electronics computer. Graphical methods are assumed throughout the programme.

The topics listed below are to be taught throughout the entire school, at first at an intuitive level, followed by a naive level and ultimately in as mathematical structures. At all times practical applications motivate the study.

(1) Sets ; (2) relations ; (3) functions ; (4) the cardinals ; (5) the line and the plane ; (6) groups ; (7) ring of integers ; (8) the ordered field of real numbers ; (9) numerical calculation ; (10) polynomials, equations and inequations ; (11) vectorial plane ; (12) Euclidean metric geometry ; (13) statistics ; (14) the plane and complex numbers ; (15) formal study of groups, rings and fields ; (16) vector spaces, including matrices ;

(17) axiomatic affine geometry ; (18) Euclidean geometry of space ; (19) probability (finite sample space) ; (20) metric space and elementary topology ; (21) limits and continuity ; (22) differential calculus ; (23) integral calculus ; (24) simple differential equations.

The above scope does not signify the sequence in which the topics are listed. There can be many sequences.

II. Modifications for mass education.

The programme proposed, in its austere form, is for the science mathematics line at the secondary school. But the same topics properly modified in depth and abstraction and supported by more applications must be the programme for students in the non-scientific line if they are to gain a liberal education. Mathematics as one of the great achievements of the human mind must become known to all persons, but known in its modern aspect. It is possible to arrange a sequence of essential topics taught in the spirit of mathematical structure, and so as to be most useful to technicians, mechanics, business personnel and the like, this programme should be filled with practical applications so that at whatever stage the students cease their formal study of mathematics, they will have gained useful as well as interesting knowledge.

III. Training of teachers.

Looking at the proposed programme, a teacher should be thoroughly competent in all the topics at the level far advanced from that at which it is to be taught. It was stressed that there is no such thing as a secondary school mathematics, a college mathematics, and a higher mathematics, but essentially one mathematics which is studied continuously but always at a higher level in subsequent study. Hence, the university study and post-university study covers the same topics in an extended, deeper, wider and more rigorous manner. Added to this must be the psychology of learning mathematics and special techniques of teaching, with proper supervision of his apprentice teaching. But also the teacher must continue his education of mathematics throughout his professional career.

IV. Mathematics in other sciences.

While section D. of the Congress concerned itself mainly with science and mathematics education at the primary and secondary-school level, most of the other groups dealt with the amount of, kind of, and way of using mathematics in the several sciences. The general agreement of the Congress was that it is the modern conception of mathematics that is most useful, and best applied in the study of the sciences. The

following example illustrates how this point of view became prevalent.

Mathematics for physics.

General principles :

1. Education should proceed by successive approximation. At each step part of the subject should be taught with all possible exactness and rigour, whereas other matters could just be formulated, the theorems being given without demonstrations for the purpose of practical use. It is quite necessary that the teacher distinguishes between these two aspects of this course.

2. The topics from physics in the programme should not be a matter of further discussion.

3. As far as possible, the sequence of mathematical topics should be chosen so as to be in agreement with the succession of the subjects treated by the physicists ; it is desirable that a close co-operation of the teachers in physics and mathematics should be established.

4. The exercises and applications in mathematics teaching should be taken, as far as possible, in various fields of physics or astronomy.

Secondary school :

In agreement with the report of Professor Fehr, the committee suggests that the following subjects should be taught in secondary schools:

A1	B1
Theory of sets	Real numbers
Relations	Graphics
Group theory	Primitives
Integers	Exponential
Complex numbers	Logarithms
Trigonometry	Slide rule
Vector space	Vectorial functions
Calculus	Linear programming
Differential equations with constant coefficients	Elementary probability and statistical theory
Linear and homographic group	
Analytical geometry	

1/ Throughout, column A refers to the subjects which should be taught with all possible exactness and rigour (at a certain level) ; column B refers to subjects given without demonstration and which, in physics, are given only in a descriptive way.

This programme has been chosen in order to fit the needs which the physicists presently attending the meeting have presented as a suggestion.

A	B
Force	Work, potential difference
Power	Heat : temperature
	specific heat
Geometrical optics	Solidification, vaporization
Geometry of vibrations	
Interferences	Waves in optics :
Wave length	refractive index
Doppler effect	dispersive system
Velocity	elementary spectroscopy
Acceleration, relation	Atomic theory
with force	Absorption, emission,
	blackbody
Centrifugal force	Stefan's law
Linear oscillator	Elements of nuclear physics
Electricity : Ohm, Joule	$E = mc^2$
Lenz, Laplace	Acoustics : strings, pipes
Perfect gas	Thermal machines
Alternating currents	Conversion of energy
inductance, capacitance	Astrophysics :
Astronomy :	Radiations of the stars
Kepler's laws	
Satellites	
Newton's laws	

Summary of science education and economic growth

I. Central thesis.

The development of science programmes for the primary schools and the secondary schools is a highly sophisticated and creative act : all good science programmes make a difference in the way people live. Science programmes in various regions and nations will have certain common elements related to the nature and structure of science and certain distinctive elements related to the culture, society and economy of the region or nation.

Mathematics and Economics Growth /1

It is quite evident that while, quite properly, researchers in mathematics and science seek new knowledge for the sake of knowledge alone, this is not the primary reason that mathematics and sciences have achieved importance, even wider interest today. It is the uses of these disciplines and the way in which they have changed modern society that brought them to the attention of the public at large. It is fitting and proper then that this report should close with a remarkably clear statement of the relation of mathematics to economic growth. What is said of mathematics applies equally well to all the other sciences.

The present trends in the reform of mathematical instruction are quite well summarized by three documents available to us :

1. Professor Akizuki's report, especially concerned with the need for better co-ordination between the teaching of mathematics and the teaching of engineering, physics and the sciences in general ;
2. Professor Fehr's summary of the discussions held at anOECD conference in Athens last November and presented at length in chapter V ;
3. The university programme elaborated by a representative group of European mathematicians for the teaching of pure mathematics and for the teaching of mathematics with an orientation toward the applications.

However, none of these documents bears explicitly on the relation of the teaching of mathematics to economic growth. These lines are therefore written to fill the gap.

It hardly needs to be stressed that mathematics has a fundamental but indirect role to play in economic development simply because it is a basic factor in scientific and technical training and research. Thus in every country, regardless of the stage of economic development which it may have attained, mathematics has to be taught to an increasing number of future engineers, physicists, chemists, biologists, medical scientists and other highly trained scientific and technical specialists whose services are or will be urgently required in the economy. It is equally important that mathematics of the more elementary variety be taught to large numbers of the technicians and skilled workers without

1/ This section was contributed by Professor Marshall H. Stone of Chicago University.

whom the advanced training of such specialists cannot be effectively employed in industry, agriculture, fisheries, mining and other economically productive enterprises. The greater the economic need for scientific and technical personnel at various levels of competence and skill, the greater is the economic importance of securing excellent mathematical instruction in schools, technical training colleges, universities and higher technological institutes.

In developing countries the pressing need for accelerated economic growth appears to justify an immediate orientation of academic training in science and technology towards applications, particularly those to which high priorities have been assigned in national planning. Thus the reasons for teaching mathematics in closer co-ordination with scientific and technological instruction are particularly cogent for such countries. The papers of Professors Akizuki and Fehr show that this closer co-ordination is now being given very serious attention in the elaboration of the new mathematics curricula. They show also that much of the work to be done in order to achieve a truly satisfactory co-ordination still lies ahead of us. The discussions at Frascati already made it clear that the time is ripe for co-operation between scientists and mathematicians in carrying out this work. The tasks of co-ordination, it should be noted, is all the more challenging because the new mathematics curricula not only contain much new subject-matter, but also a quite new approach to mathematics itself, while science and technology are almost daily discovering new and unexpected uses of mathematics. The fact that mathematical education is currently undergoing something of a revolution poses special problems for those countries which are expanding their educational systems and trying to tie them into the development of the economy. If some compromises are necessary in order to hasten this expansion and to give to school and university instruction the practical orientation which is immediately desired, the developing countries should at the same time make determined efforts to bring mathematics instruction as quickly as possible up to the best modern standard. It would be most unfortunate if mathematical curricula and methods of instruction on the point of being abandoned as out of date in the advanced countries were now introduced on a permanent basis anywhere else

For reasons which are now quite generally understood and respected, optimal economic development requires that research scientists and mathematicians be trained in increasing numbers. From the point of view of a developing country it is essential to have at least a small number of scientists active in research if only to keep abreast of advances in science and technology in other countries and to turn them to good use whenever possible. Furthermore, each country has its own special problems of a scientific or technological nature which require organized

research best carried out by research scientists of that country. Thus, in a developing country the teaching of mathematics, especially higher mathematics, should be so organized as to provide stimulation and support for scientific research. Although research in mathematics itself might appear to be more or less of a luxury under the conditions obtaining in a good many developing countries, it is perhaps more easily and more inexpensively initiated than any other kind of scientific research; and once under way it is likely to have very stimulating effects both on mathematics teaching and on research in other fields. For this reason it seems to be desirable for a developing country to discover and train its citizens of exceptional mathematical talent and to employ them in research activities as well as in teaching, regardless of immediate practical benefits. In the long run reasonable encouragement to mathematical and scientific research seems virtually certain to pay off.

But mathematics also has a direct part to play in economic development. Analysis, decision-making, planning, and management in the economic and social domains are no longer possible on an adequate scale without fairly elaborate mathematical techniques and fairly powerful computing instruments to make them applicable in an effective way to real situations. Thus it is only recently that appropriate techniques and instruments have been created for these purposes, the potentialities of mathematics in this connexion are only beginning to be understood. However, it seems safe to predict that organizations and institutions engaged in any aspect of economic planning will need an increasing number of mathematically trained persons capable of using and developing the new techniques and instruments. Thus in all countries, and perhaps particularly in the developing countries, where good economic planning is clearly at a premium, provision should be made for the training of the needed personnel. This would seem to necessitate some modifications in the traditional mathematics curriculum if it is to serve as a basis for such training. Subjects such as mathematical statistics, linear programming and modern theory of computation must find a place in the curriculum, for this as well as for other reasons. Fortunately it is a fact that many of the proposals for new curricula have been made with this point in mind. This is an added reason why countries engaged in expanding their educational systems should take a good look at the new curricula before deciding what mathematics is to be taught in their schools and universities.

The expansion of the secondary schools and the simultaneous improvement of their standards, particularly in mathematics instruction, pose some very refractory problems for a developing country, largely because of the lack of properly trained teachers. In order to recruit and

prepare teachers with the necessary qualifications, the first step is to raise the universities and the normal schools up to the appropriate level. Thus an important reason for a developing country to bring higher mathematical education up to the best modern standard as rapidly as possible is that in no other way can it be sure of recruiting and training enough secondary-school mathematics teachers capable of teaching a modern mathematics curriculum. Until this has been accomplished, the secondary schools will continue to turn out insufficient numbers of students, almost all of whom will be inadequately trained. Retaining this unsatisfactory state of affairs, ill-prepared students will have to be admitted to normal schools, universities and technological institutes in order to maintain an adequate supply of engineers, scientists and professional workers. The remedy, as many developing countries have recognized, is to institute propaedeutic instruction at the university level to overcome the deficiencies of the matriculates. For science students, and for some others as well, this programme must include mathematical topics which eventually should be taught only in the secondary school. This affords an exceptionally favourable set of circumstances for experimenting with some of the modern proposals concerning secondary school mathematics before introducing them in the schools. A difficulty involved in the preparation of secondary-school mathematics teachers is that up till the present time not enough attention has been paid to determining of what it should consist. The traditional preparation in most countries must be throughly revised if it is to qualify teachers to handle the emerging secondary-school mathematics programmes. As professor Fehr's paper indicated, this need is now quite generally appreciated and steps will undoubtedly be taken to meet it. The developing countries should therefore follow with close attention the proposals made to this end and should adapt them as soon as possible to their own requirements and their own special circumstances.

As is evident from this brief analysis, the co-ordinated development of the different parts of the educational system - the primary and secondary schools, normal schools, universities and technological institutes - and of the organizations concerned with scientific research involves complex relationships among many vital factors. If it is to be planned and smoothly carried out it must be treated as part of any overall economic planning which may be undertaken and it must be approached with the best planning techniques available. The rapidity with which such development can proceed is certain to be limited by budgetary considerations as well as by the inherent difficulties to be overcome ; and it thus depends to a certain extent upon economic trends and developments which education and research are expected eventually to influence in a favourable sense. A modern scientific study based on the new techniques alluded

to above should be made of educational development, considered in and for itself, and also as a feed-back process in the evolution of the economy. Of course mathematics would have its part to play in such a study.

BIBLIOGRAPHY

ELEMENTARY SCHOOL MATHEMATICS

Abellanas, P. Mathematica 1er Curso. University of Madrid, Spain, 1964.

Anglade. Arithmétique, Etude Axiomatique. Magnard, Paris, 1961.

Banks, J.H. Learning and Teaching Arithmetic, Revised edition, Allyn and Bacon, 1964.

Bell, Hammond and Herrera. Fundamentals of Arithmetic for Teachers. Wiley & Son, 1962.

Crouch and Baldwin. Mathematics for Elementary Teachers. Wiley & Son, 1964.

Corzes. Arithmétique, Masson et Cie, Paris, 1956.

Donneddu, A. Arithmétique Générale. Dunod, Paris, 1962.

Entebbe Mathematics Project. Educational Services Inc., Watertown, Mass. 1963-1964.

Hacker, Barnes and Long. Fundamental Concepts of Arithmetic. Prentice Hall, 1963.

Meserve and Sobel. Introduction to Mathematics, Prentice Hall, 1964.

Peterson and Hashisaki. Theory of Arithmetic, Wiley and Sons, 1963.

Smart, J.R. New Understanding in Arithmetic, Allyn and Bacon, 1963.

School Mathematics Study Group. Number Systems ; Studies in Mathematics, Vol. VI, A.C. Vroman and Co., 1961.

School Mathematics Study Group. A Brief Course in Mathematics for Elementary School Teachers ; Studies in Mathematics, Vol. XX, A.C. Vroman and Co., 1963.

Ward and Hardgrove, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley, 1964.

Webber, G.C. and Brown, J.A. Basic Concepts of Mathematics, Addison-Wesley, 1963.

Geometry in the Elementary School

Hawkes and Suppes, Geometry for the Primary Grades, Holden-Day, San Francisco, California.

School Mathematics Study Group, Studies in Mathematics, Vol. VII, Intuitive Geometry, AC. Wroman, Pasadena, California.

School Mathematics Study Group, Studies in Mathematics, Vol. V, Informal Geometry, A.C. Vroman, Pasadena, California.

Piaget and Inhelder, The Child's Conception of Space, Routhledge and Paul, London.

Piaget and Inhelder, The Child's Conception of Geometry, New York Basic Books.

Lovell, K. The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, Philosophical library.

The Arithmetic Teacher, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C. : A magazine devoted to all aspects of teaching mathematics in the elementary school.

HIGH SCHOOL MATHEMATICS

Italy.

- Per un insegnamento moderno della matematica nei Licei classici, nei Licei scientifici e negli Istituti magistrali, Bologna, 1963.
- Per un insegnamento moderno della matematica, negli Istituti Tecnici, 1963.
- Per un insegnamento moderno della matematica, negli Istituti Tecnici, 1964.
- Per un insegnamento moderno della matematica, nella Scuola media, 1964.

Greece.

- Experimental Teaching of Mathematics, Book I, Grade A', Ministry of Education, Athens, 1962.
- Experimental Teaching of Mathematics, Book II, Grade B', Ministry of Education, Athens, 1963.
- Experimental Teaching of Mathematics, Book III, Grade C', Ministry of Education, Athens, 1964.

Scandinavia.

- Geometry, grades 7 - 9, two parts
- Algebra, grades 7-9, three parts
- Geometry, grades 10-12, three parts
- Algebra, grades 10-11, two parts
- Calculus, grades 11-12, one part
- Differential equations, grades 11-12, one part
- Probability and statistics, grades 11-12, one part

(All of these books are published from 1961-64 and available from M. Hastad, Eckleisiastik-departmentet, Stockholm 2, Sweden).

United States of America.

- Mathematics for Junior High School, Vol. I, two parts.
- Mathematics for Junior High School, Vol. 2, two parts
- First Course in Algebra, two parts
- Geometry with Co-ordinates, two parts
- Intermediate Mathematics, parts I & II
- Elementary Functions
- Introduction to Matrix Algebra

All of these books were produced by The School Mathematics Study Group 1959-1962, and are available from Yale University Press, New Haven, Conn., U.S.A.

- Arithmetic of the Real Numbers, Unit I
- Generalizations and Algebraic Manipulation, Unit II
- Equations and Inequations, Unit III
- Ordered Pairs and Graphs, Unit IV
- Relations and Functions, Unit V
- Geometry, Unit VI
- Mathematical Induction, Unit VII
- Sequences, Unit VIII
- Elementary Functions, Unit IX

All these units were produced by the University of Illinois Committee on School Mathematics, under the direction of Max Beberman and Herber Vaughn, and are available from D.C.

- Circular Functions and Trigonometry, Unit X — Heath and Co., Boston, Mass. U.S.A.
- Complex Numbers, Unit XII

France.

- Breard C. Mathématiques 2e, L'Ecole, Paris VIe.
- Breard C. Mathématiques Elémentaires, Vol. I, II, L'Ecole, Paris VIe.
- Breard C. Mathématiques 6th through 3, 4 Vol., L'Ecole, Paris VIe.

Others.

- Kristensen and Rindung : Matematik I (Grade 10), 1962. Gads Forlag, Copenhagen.
- Kristensen and Rindung : Matematik II (Grade 11), 1963. Gads Forlag, Copenhagen.
- Kristensen and Rindung : Matematik III (Grade 12), 1964. Gads Forlag, Copenhagen.
- Fenchel, Handest, Meyer and Neerup, Elementaer Matematik I, Munksgaard, Copenhagen, 1964.
- Råde, L. Probability and Statistics, Förlaget, Stockholm, 1963.
- Fehr, Bunt and Grossman, Introduction to Sets, Probability and Hypothesis Testing, D.C., Heath and Co., Boston, Mass. 1964.
- Fehr, Carnahan and Beberman, Algebra with Trigonometry, Second Course, D.C. Heath and Co., Boston, Mass. 1963.
- Papy, G. Mathematiques Modernes, Didier, Brussels.
- School Mathematics Project, Book T. Cambridge University Press, London, 1964.

TRAINING OF SECONDARY SCHOOL TEACHERS

Set theory.

- Breur and Fehr, Introduction to the Theory of Sets. Prentice Hall, 1958 (also in German and in French).
- Halmos, P. Naive Set Theory, Van Nostrand, 1960.
- Hamilton and Landin, Set Theory, Structure of Arithmetic, Allyn and Bacon.
- Suppes, D. Axiomatic Set Theory, Van Nostrand, 1960.

Algebra.

- Birkhoff and Mac Lane, Survey of Modern Algebra, revised edition, MacMillan Co., 1965.
- Kurosh, A.G. General Algebra, Chelsea Publishing Co., 1963.
- Lentin and Rivaud, Elements d'Algebre Moderne, Vuibert, Paris, 1958.
- Page and Swift, Elements of Linear Algebra, Ginn and Co., 1961.
- Papy, G. Groupes, Dunod, Paris, 1961.

Probability.

- Fehr, Bunt and Grossman, Introduction to Sets, Probability and Hypothesis Testing, D.C. Heath and Co., Boston, Mass., 1964.
- Goldberg, Probability, An Introduction, Prentice Hall, 1960.
- Parzen, Modern Probability Theory and its Application, John Wiley and Co., 1960.

Geometry.

- Blumenthal, A Modern View of Geometry, Freeman, San Francisco, 1961.
- Choquet, G. L'Enseignement de la Géométrie, Hermann, Paris, 1964.
- Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley and Co., 1961.
- Libois, P. Introduction à la Géométrie, Presses Universitaires de Bruxelles, Belgique, 1963.
- Moise, Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley, 1964.
- Wylie, Foundations of Geometry, McGraw-Hill, 1964.

Analysis.

- Dieudonné, J. Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960.
- Johnson and Kiokemeister, Calculus with Analytic Geometry, Allyn and Bacon, 1961.
- Lang, S. A First Course in Calculus, Addison-Wesley, 1964.
- Lang S. A Second Course in Calculus, Addison-Wesley, 1964.

Topology.

- Cairnes, S.S. Introductory Topology, Ronald Press, 1961.
- Kelley, J. General Topology, Van Nostrand, 1955.
- Kuratowski, K. Introduction to Set Theory and Topology, Pergamon Press, 1961.

General.

- Doneddu, A. Les Bases de l'Analyse Mathématique Moderne, Dunod, 1963.
- Felix, L. Exposé Moderne des Mathématiques élémentaires, Dunod, 1959.
- Per un Insegnamento Moderno della Matematica nelle Scuole Secondarie, Ministero Della Pubblica Istruzione, Bologna, 1962.
- European Students' Handbook - Mathematics, University of Munster, Münster, Westfalen, Germany.
- Courant and Robbins, What is Mathematics, Oxford, University Press.
- Exner and Rosskopf, Logic in Elementary Mathematics McGraw-Hill Book Co.

Résumé de l'article :

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Howard F. Fehr

L'article présente un extrait du rapport préparé pour le Congrès international sur l'enseignement des sciences et le progrès économique (Dakar, Sénégal, 1965). L'auteur donne une vue synthétique des idées et des tendances nouvelles dans l'enseignement des mathématiques aux différents niveaux d'une part, et dans les diverses directions des écoles primaire et secondaire, d'autre part.

En ce qui concerne l'enseignement primaire, trois principes sont mis en relief :

1) L'enseignement des mathématiques, tout en étant mis à la portée des enfants, devrait être, dès le début, adapté aussi aux structure fondamentales des mathématiques contemporaines ;

2) étant donné le temps limité de la période scolaire, l'enseignement primaire des mathématiques devrait être organisé d'une manière économique et efficace ;

3) les aspects esthétiques et affectifs des mathématiques devraient être mis en évidence. La réalisation de ces principes exige l'introduction dans l'enseignement de mathématiques modernes dirigées vers ce qui est simple, clair et ouvert aux idées de base. Le changement au niveau primaire concerne plutôt le langage, les concepts et le symbolisme que le contenu même. L'auteur développe en détails cette conception.

L'enseignement mathématique au niveau secondaire est traité dans ce rapport de la même manière. On commence par préciser les principes du choix des matières du programme, en ce qui concerne les aspects logiques, pratiques et psychologiques de la question, et on développe de manière plus détaillée la mise en oeuvre de ces principes.

L'auteur indique aussi certaines modifications de ce programme concernant l'éducation mathématique en dehors de l'école secondaire.

Ensuite, on présente les principes de la préparation moderne des professeurs de mathématiques, en mettant en évidence le genre et la durée des études mathématiques nécessaires pour les enseignants des différents degrés, ainsi que leur préparation pédagogique et professionnelle.

Un chapitre du rapport est consacré à des remarques sur la réforme par étapes de l'enseignement des mathématiques, en mettant l'accent sur les pays en voie de développement.

On présente aussi les suggestions du Congrès concernant la corrélation de l'enseignement des mathématiques avec l'enseignement de la physique. Les rapports mutuels de l'enseignement modernisé des mathématiques et du progrès économique font l'objet du chapitre final.

La bibliographie contient une liste de documents de base caractérisant les tendances nouvelles dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que des manuels d'étude et des ouvrages d'information pour les enseignants.

MATHEMATICS IN THE TRAINING OF GEOLOGISTS

T. Neville George

School background.

Geology in most countries has only an insignificant place at any stage in formal school instruction. It may be incorporated into an elementary general or natural science, usually as allusive comment, in the primary or elementary school, and parts of it may find a place in secondary-school teaching of chemistry or biology or geography ; but as a self-contained subject in its own right, comparable with any of the other sciences or with mathematics, it is mostly without status.

European practice, as judged by the curricula in secondary schools leading to the school-leaving examination or to the university entrance (matriculation) examination, is almost universal in excluding it. It is not provided, or is only rarely provided, in Austria, Belgium, Czechoslovakia, Finland, Germany, Italy, the Netherlands, the Scandinavian countries, and the U.S.S.R., where it is never a requirement of entry into university faculties of science, even for students proposing to specialise in geology. It is widely taught, but in an incidental rather than a fully systematised fashion, only in French secondary schools, in which, however, many of the teachers are not professionally trained geologists. It is taught at an advanced level, comparable with physics, chemistry, and biology, in a relatively few secondary schools in England and Wales (but not Scotland) where the nationally centralised school-leaving General Certificate of Education includes it as an option in the science curriculum.

North-American school practice, locally highly variable in standard and range, is usually to exclude any formal instruction in geology. In those schools that adopt an Earth-science curriculum the subject occupies (with some astronomy) a place in ninth-grade classwork (at a pupil-age of 13-14), but as yet such schools are in a small minority, and the standard reached is elementary.

It is a safe generalisation that most pupils in most countries leave the secondary school at 17 or 18 with almost no ordered knowledge of geology as a scientific discipline, and with only the most superficial and fragmentary understanding of what geology is about.

This general neglect of geology as a school subject may be ascribed to a number of factors, of which premature specialisation is the chief. When pupils on entering the secondary school at 11 or 12, before they have been introduced to the field of science or acquired any conceptual understanding of the nature of science, are directed along lines of study that presuppose a disintegrated or at least a compartmentalised science, the end and purpose of the school training can in practice only be to produce technicians competent in narrowly defined ways. The cultural and educational value of an undivided science, introduced to the pupils as a means of making them feel at home in their world, is then minimised or set aside ; and the inter-relations of the sciences, both as a reality of their growth and as a functional element in day-to-day practice, are obscured or overlooked as emphasis is placed on one or two branches almost to the exclusion of all other.

It is doubly perverse that in consequence of early specialisation geology should be excluded from school study. It is, as an educational instrument, perhaps of all the sciences the most centrally placed in its many contacts with the other sciences ; and it is peculiarly appropriate for breaking down the conventional barriers between one science and another that are placed in the pupils' minds by pedagogical artifice. Unless education from the beginning is to be frankly artisan and technical, and pupils from the close of primary-school days are looked on already as little physicists or little chemists or little biologists (or not scientists at all, but little mathematicians), there should be immediate massive attack on the present alinements of school science. Vigorous criticism of a continued intensification of the "subject" study that permeates teaching method is not the less urgent because the channelling of studies along a few lines is a product of uncontrolled force of circumstances rather than of aggressively overt intention.

The alternative to compartmentalised subjects is general science. This is not an additive compilation of knowledge through the teaching of the separate sciences whose imperfect integration is left to the pupil. It is a fully generalised science whose branches interweave in appearing to the pupil as different only in ways of looking at the same phenomena, or of isolating for analytical convenience selected kinds of observation. General science as a generalised science cannot then in its nature allow any neglect of geology (or astronomy). Nor can it organise scientific knowledge solely on the basis of the unchanging "laws" of physics and chemistry ; for a geological context enforces a long-term historical dimension on natural process visible in an Earth-structure that is the witness to and the product of the process.

At the same time, a recognition, put into practice, of the educational value of a sustained and well-integrated course in general science, introduced and carried through the secondary school for four or five years, would have an immediate effect on the level of the pupils' attainments in any one science. The attainments would tend to be raised where, as in the U.S.A., the teaching of each separate science "subject" is now restricted and segregated to its single year in an additive concept of an enlarging total science that grows by accretion. They would be lowered where, as in England especially but also in other European countries, there is now a concentration on a few science subjects in a selective concept of a refined science that grows by specialisation.

It would also have an immediate effect on the way in which geology is commonly taught in those schools where it now finds a place. This is a way that links geology with geography in an emphasis on physical processes and discusses other branches of geology in a descriptive rather than an analytical fashion, and that tends to avoid the introduction of chemical and physical principles except at the most elementary level, and of mathematics almost completely.

It would thus incidentally go far to allay the fears of those university teachers who regard present school geology as having weak foundations in the other sciences, and who prefer to assume that their students have no substantial knowledge of a balanced geology in the first year of university work.

It would above all ensure that students would no longer need to wait until after they leave school before they find geology sufficiently attractive as a subject of professional study, or before they discover a wish to specialise as geologists.

A radical revision in teaching method is not easily achieved even with the best of goodwill. It requires a corresponding change in the training of teachers and in the overlapping co-operation that needs to be achieved (in knowledge and understanding) between different kinds of specialist teachers (in the physical sciences, the life sciences, the Earth sciences). In France, however, and in some schools in America, an extension of teaching of a systematised Earth science in the later school years, and its closer assimilation with the other sciences, would not greatly interfere with a curriculum that has already been approved and that only needs wide adoption to become both nationally important and nationally exemplary.

School mathematics.

A discussion of school geology and school general science may appear to be, but is not, digressive in relation to the place of mathematics

in the training of geologists. In present school contexts there are two divergent attitudes in the response of most pupils to what they conceive to be the content and the purpose of mathematics. On the other hand, mathematics is a burden, to be avoided or circumvented where it can be, and to be dropped as soon as possible. On the other hand it is a useful adjunct to the solution of problems in physics and chemistry that are recalcitrant without it.

A third attitude, that of the pure mathematician who regards the purpose of school mathematics, established by its own internal demands to be an introduction to the nature of mathematical thinking, is rare amongst pupils even in senior forms. It is equally rare amongst potential professional geologists, however much the teacher's approach to the teaching of mathematics may be conditioned by his devotion to its logical and abstract qualities.

An avoidance of mathematics, and an assumption that geology is an "observational" science not demanding mathematical treatment, are implicit and even imposed under some systems. This is so in England and Wales when three-subject advanced study in the senior forms of secondary schools is sometimes planned to exclude not only mathematics itself but a physics, and sometimes a chemistry, that demand some advanced mathematics for their proper understanding. Pupils then cease to study a formal mathematics at the age of 15-16 : thereafter, in a choice for instance of geology, geography and zoology as their three special subjects, they attempt to become professional geologists on a basic mathematical training that may lack any trigonometry, or solid geometry, or calculus, or algebra beyond quadratic equations.

In most other countries the formal content of school mathematics may be more substantial, but the attitude to the subject may be not dissimilar in the pupil's reluctance or inability to recognise the importance of a service mathematics in the co-ordination or interpretation of his scientific observations. This is especially so when the kind of mathematics taught is mathematics for mathematicians - a detached self-sufficient rationalised mathematics seemingly restricted to the mathematics classroom and having no relevance to the science except when interpreted by the science teachers. Unless the pupils are (for the time being) stimulated to be mathematicians, they react by learning the minimum needed to allow them to survive ; they pick up the tricks of using formulae without real understanding ; they apply what mathematics they know where their teachers point out the applications but never themselves display initiative in adapting their mathematical knowledge to novel circumstances ; and they scrape a pass in their examinations. It is also sometimes the case, where school work is shadowed by the school-leaving examination, that the teachers themselves, trim and

orientate their teaching to the needs of the examination, and prompt their pupils in a mathematical ingenuity that falls short of mathematical understanding.

Formidable pedagogical problems thus face both teacher and pupil when the pupil has never any intention of becoming a professional mathematician. On cultural and educational grounds the mathematics the pupil learns should be characterised by a rigour and a precision that at once stimulate him to an excitement in grasping the essentials of mathematical process and enable him to understand the peculiar qualities of mathematical thinking. One more practical grounds, the mathematics he learns should be seen by him not to be a remote esoteric exercise but to have direct application to his scientific studies. He may never become wholly convinced that as a scientist his ultimate aim is to translate the observable configuration of the universe into mathematical terms. But he may be expected to recognise that in much of his work mathematics is not merely a helpful adjunct to his scientific thinking but is inherently the basis of the way in which he is able to order his scientific observations -- that indeed he would find his observations unmanageable and himself helpless in manipulating them unless he expressed them or aspects of them in mathematical language.

Mathematics then comes to be recognised by him not merely as another subject in a permutative combination of subjects that could as well be without it as contain it. As he matures he recognises it should be as closely integrated with the several sciences as they are with one another. A general science requires a correlated mathematics, integral and complementary, not accretive.

This is now taken for granted in the physical sciences, whose mathematical expression is built into their structure and has indeed conditioned their growth ; and pupils are not disconcerted when algebra and calculus are introduced as method into discussions of dynamics and electromagnetism and mass action. It is otherwise in the biological sciences and the Earth sciences. In part this is because pupils are not yet accustomed to having quantification practised even where it is demanded by the nature of the problems they meet. In part it is because the usefulness of mathematics is not assumed early enough in the school curriculum for pupils to become habituated to a multiple adaptation of what they learn under a different label or in a different classroom.

The Princeton project [1] of giving young pupils in the junior high school (13-14 years old) unified instruction in the physical sciences

1. Time, space, and matter : investigating the physical world. Junior high school project, Princeton University, Princeton, New Jersey. 1963.

(including geology) and mathematics --much of it directly emerging from the pupils' own active experimentation and observation -- shows what can be done by applying simple arithmetic to geological process in an analysis of the dissection of the Grand Canyon of the Colorado. The extrapolation from the rate of abrasion of pebbles in running water as determined in the laboratory to the rate of removal of cubic miles of rock in the erosion of the canyon is enormous ; but if the pupils are made aware of the crudely approximate nature of their results they are at the same time given in their own analytical experience an insight into the nature of valley formation, and (perhaps of greater importance) into the geological time-span of a changing landscape. In that experience they become accustomed, almost incidentally and casually, to using the mathematical instrument with an unselfconscious matter-of-fact ease.

The success of the Princeton method is sharpened when in other contexts, sometimes after a lapse of years without formal mathematical instruction, mathematics is brought into a study of landforms for more mature pupils, 17-18 years old. They are startled to find it introduced as an alien and discordant element into what they have always supposed to be a qualitative geology, and they take some time both to see its relevance and to orientate their minds to the manner of its application.

Thus (to continue the instance) a linear extrapolation, in the Princeton project, to determine the age of the Grand Canyon, tacitly assumes that erosion is constant in intensity over a long time-interval ; whereas (without external modification of landform by earth-movement) its effects usually show an exponential decline the more its work continues. In one aspect, this is revealed in the long profile of many valley floors, including the Grand Canyon, which, in the best fit of the altrimetric data, approximates to a curve or a series of curves of general exponential form. Mature pupils, towards the end of their secondary school course, are (or should be) fully conversant with the nature of such curves and of their graphical expression ; but, mathematics being beyond their expectations in a geological context, it is commonly found that they resist its introduction -- not perhaps because it is difficult but because it is strange -- by an apparent inability to accommodate what they expect to what they know, and by a disheartening reluctance to apply tried (if "forgotten") method in a novel situation. Even when they finally see a parallel between landforms, erosive processes in time and mathematical models, they look to the teacher to derive the specific curve and remain obtuse in their attempts to convert the data of a measured valley profile into a best-fit formula.

The example, merely incidental, serves to emphasise some of the deficiencies that arise from a mode of teaching the sciences and

mathematics that is not fully integrated. The pupils may have a thorough grounding in an adequate mathematics, but in their minds it is an abstract shut-off mathematics having no contact with what they study elsewhere ; and they are without a facility in discerning the many apposite ways in which it may be applied to the better understanding of most of the other sciences. This is a pedagogical failure, and is in part directly attributable to the fragmented manner in which pupils are taught in the secondary school. The effectiveness of a unitary course in general science lies in the pupils' being given a familiarity with interchangeable modes of looking at and integrating experience, and in their being able to throw light on problems in one science by a ready transfer of techniques from another.

A finger-tip expertise (at whatever level of attainment) in using mathematical tools on the appropriate occasion, and an ability to recognise the occasion, are needs that are scarcely satisfied by present methods of teaching. They do not require that mathematics (which has its own cultural integrity and internal standards of scholarship) should be taught dominantly with an applied bias ; but they stress that the relevance of mathematics in scientific practice should be made clear to the pupils at all stages, either by the science teachers or (preferably) by the mathematics teachers. This is achieved less in the pointing-out of possibilities than in a constant application of mathematical methods to actual examples of real problems.

Physics, and to some extent chemistry, are the only sciences with which mathematics has as yet been consistently integrated. Experience in teaching them makes clear that for the majority of pupils, who are without great originality or initiative in running ahead of the teachers, a similar integration is needed with each other separate science (or in an all-embracing general science) if a use of mathematics is to become second-nature to the pupils.

Geology (and to some extent biology) are at a disadvantage in not having a place in the schools comparable with physics and chemistry, and in not having a comparable call on a service mathematics. In consequence, a universal and almost total lack that faces all teachers of geology, when senior-school pupils or first-year students in university institutions begin to study the subject systematically, is of textbooks of mathematics in which the applications and the riders are not dominated by examples from physics and chemistry but include in abundance a variety of examples from the natural sciences. Balanced textbooks wide in spread, or parallel textbooks each alines towards its particular science would at once make the students of the natural sciences feel at home in a mathematically elucidated geology and biology, and give them a familiarity with the specific ways in which the mathematics may be

applied to their special subjects.

Syllabus in school mathematics.

Since geology generally finds no effective place in the secondary-school curriculum of any country, and is not likely to find one for some time to come, it can have little to say on the kind of mathematics taught in the secondary school. Comment is limited to what it inherits in the knowledge of mathematics possessed by matriculants when they begin their geological studies in college and university. In contrast, mathematics dominates the curriculum in every grade. It is perhaps the most thoroughly and continuously taught of all school subjects. On leaving the secondary school the science pupil may expect to have had ten or twelve years of sustained and intensive instruction in it and to be relatively highly proficient in its major branches.

When the prospective geologist begins his studies in post-school geology, what further instruction he should receive in a service mathematics will thus be affected by three complementary factors : -

1. the content of school mathematics, and the manner in which its branches are taught ;
2. the grounding in school mathematics that all university students are expected to have, regardless of their later specialisms ;
3. the particular skills in the application of an academic mathematical instrument the students have been able to acquire.

Until recent decades there was general agreement on the range of mathematics to be covered by the science pupils in the secondary school, even if the standard reached differed widely from school to school (and from country to country). It included an arithmetic distinguished from algebra, algebra up to binomial equations and to logarithms on the decimal scale, geometry resting heavily on Euclid with some cartesian geometry, and a little spherical geometry, the elements of an independently studied trigonometry, and sometimes an introduction to differential and perhaps integral calculus.

Latterly, divergences of view on the kind of mathematics to be taught and on the way it should be organised have arisen from a variety of causes:

1. pedagogically, criticism of traditional modes in their lack of rigour, their tedious circumlocution, and their incoherence has stimulated growth of the "new mathematics", in which the boundaries between the branches are largely removed, the pupils' imagination is enlisted

and their understanding sharpened and the rate of instruction and learning greatly accelerated /[1] ;

2. the temper of the new mathematics has not everywhere filtered through to the authorities who determine curriculum and syllabus, nor have its purposes everywhere received the approval of the teachers whose task it is to put mathematics into the schoolroom ;

3. the attitude of teachers to school mathematics, especially when the teachers are not mathematicians, is ambivalent : mathematics may be regarded either as a self-contained discipline, to be cultivated for its own intrinsic qualities as an abstract and logical system in which internal validity is paramount and not to be influenced in its contents by the requirements of post-school non-mathematical education, or it is a preparation and a grounding for more advanced studies in sciences that use it as an operational instrument ;

4. what university institutions may demand or expect of the mathematical knowledge of their students is often challenged as not being of central importance in the schools ; for when the great majority of secondary-school pupils do not proceed to university-type institutions what is taught in school, and how it is taught, cannot well be controlled by university interests, and there certainly cannot be any assumption that school mathematics is or should be moulded to the needs of future geologists, or even future physicists.

The divergences are real and widespread. They are itensified when in different countries the average age of university matriculation varies from 17 to 19 and the nominal length of secondary-school education from three to nine years. The differences of view are not wholly resolved when in the teeth of traditionalist resistance a modernist professor of mathematics can declare "Euclid must go !.. a whole course in Euclidean plane geometry can be tackled in three hours". Nevertheless, there is a growing consensus that a reformed mathematical teaching should be planned about a reorganised syllabus and method that at advanced levels in the secondary school might be summarised as follows : -

1. The language of sets and its use in many branches of mathematics, emphasised as central. This is partly a change in approach and in semantical attitude, demanding a more logical and systematised reconciliation of sign-procedures (figures and letters)in arithmetic and algebra and visual (or conceptual) space-procedures in geometry,

---

1. See for instance : New thinking in school mathematics. O.E.E.C. Paris, 1961.
Synopses of modern secondary school mathematics. O.E.E.C. Paris, 1962.

and a consequent much-simplified and rationalised unification of hitherto disjunct branches of mathematics.

2. Algebra, including much geometry and trigonometry. Rational, irrational, real, imaginary, and complex numbers ; the algebra of integers and polynomials ; number and direction, and vector algebra as a link with formal geometry ; rational algebraic functions logarithms and logarithmic functions ; exponential functions ; trigonometrical functions.

3. Calculus and elementary analysis. Notions of continuous change ; limits ; differentiation and integration.

4. Analytical geometry, linked closely with algebra and incorporating much of traditional trigonometry. Rectangular, cartesian, and polar co-ordinates ; linear algebra and vectorial plane and affine geometry ; Euclidean and vector space and space of three and n dimensions ; the properties of circles, parabolas, hyperbolas, and other curves investigated algebraically ; lines and planes in three-dimensional space ; transformations of co-ordinate systems ; projections ; curves in space.

5. Combinatorial analysis, probability, and statistics. Permutations and combinations ; series ; the notions of chance and randomness, and the validity of sampling ; elements of stochastic theory and processes simple concepts in graphical illustration -- distribution and scatter, frequencies, histograms, symmetrical and skew fields, mode and mean, quartiles and deciles ; significance tests, confidence limits, standard deviation ; binomial distribution ; correlation ; regression and best fit.

The revolution in pedagogical method goes to the roots of how mathematics is regarded and what its contents are. On grounds of scholarship and advancing knowledge it transforms the nature of geometry, much of which is fused with algebra, and it introduces radically new ways of presenting number and a new level of abstraction into the quality of mathematical argument.

At the same time, the new mathematics in its impact on the schools is a very recent florescence disturbing to long-entrenched routine, and it imposes a reorientation that is strange to the orthodox, to whom it tends to be unintelligible when it is expressed in a new language by means of new symbols. Amongst the orthodox are many if not most teachers of mathematics in most countries. However desirable the changes may be they have as yet been introduced only into a small minority of schools, and into some countries almost not at all.

It is thus not easy to make general statements on what basic mathematics the potential geologist may be expected to possess when he leaves the secondary school, or how far he is able to apply it to specifically geological problems. Thus, as the 1962 O.E.E.C report (op. cit.) records, the notion of sets and operations on sets is not used in the majority of countries, which also neglect or ignore projective geometry, vectors and vector analysis, probability and statistical inference in even the most elementary form, and applied mathematics as mechanics. Combinatorial analysis locally is in decline. Geometry remains dominated by Euclid. Elementary calculus is not often to be found in the schools of North America (though it is usually taught in European schools). Where re-orientation occurs, analytical geometry is developed at the expense of descriptive geometry, which as a formal branch of study is excluded from the syllabus in half the countries reporting.

The matriculant geologist in most countries probably has obtained (in old terms) a grounding in algebra up to the binomial theorem, a facility in the use of logarithms (if not a thorough understanding of their nature), a selective acquaintance with Euclidean geometry up to Book XI of the Elements, an elementary introduction to a non-vectorial trigonometry, and a smattering of graph-tracing including the use of cartesian and rectangular co-ordinates. Even this limited range of syllabus supposes that he continues uninterruptedly his mathematical studies until the end of his school-leaving year. In some countries, however, including England and Wales, he may elect to discard mathematics two years earlier. He is then almost wholly ignorant of trigonometry and co-ordinate geometry and of the more advanced parts of algebra when he enters a university institution, and he may never receive further instruction in a formal mathematics to repair his ignorance.

Teachers of university geology are less critical of the range and depth of school mathematics than of the thoroughness with which the work is done. A general complaint is that while within the frame of the school routine (and its terminal examination) the pupil may be able to carry out satisfactorily what is expected of him, and to that extent "understand" what he does, there often appears to be a failure to evoke in the pupil's mind a natural curiosity and an active participation in what he has become skilful in. He then fails in his geology to use effectively the knowledge he has acquired in school -- he gives the impression that, being accredited in school mathematics, he may safely put the subject behind him. This lack of a positive critical rigour in mathematical usage, and of a roving mathematical eye to see mathematical studies in their intellectual context, repeat s the comment on the disinclination of students to apply their

mathematics in fields to which they are not accustomed and in ways that are not part of school rote.

Propedeutic mathematics in university institutions.

Almost all professional geologists are trained in university institutions of one kind or another, the training spanning three, four, or five undergraduate years. Since school mathematics is generally independently taught, only in a few countries is it possible to make specific demands on university matriculants to be sufficiently instructed in defined branches of mathematics. The new matriculants may or may not therefore be required or advised to attend ancillary courses in a propedeutic mathematics that rounds off or carries further what they have studied at school, and that gives them an initial foundation for their work in geology.

France, and other countries adopting the French system, make the propedeutic first year in the university uniform and compulsory for most students in pure science, the course (the "first-cycle" S.P.C.N.) being broad-based in including mathematics and geology with physics, chemistry and biology. Since the mathematics taught in many of the French secondary schools is at a high standard, the supplementary S.P.C.N. work is relatively advanced particularly in trigonometrical functions, differential and integral calculus, and the calculus of probabilities and statistics (including Student's t-test). During the course there is constant insistence on the relevance of mathematics in the fields of the experimental and observational sciences (though liaison between mathematics and geology is not stressed).

The practice in east-European countries is formally different from the French, although it achieves the same end. Students proposing to specialise in geology enter a self-contained four-year or five-year course designed wholly to meet their needs. Its curriculum includes ancillary first-year mathematics (with ancillary chemistry, physics, and biology), whose syllabus covers analytical plane and three-dimensional geometry, vector geometry, trigonometry with spherical trigonometry, equations for the circle, ellipse, parabola, and hyperbola, graphics, and statistics including the statistics of variance and linear regression.

Under German-type systems the traditional autonomy of the universities (resting on a comparable independence of the schools) is seen in the general lack of a compulsory mathematics in the first undergraduate year. Amongst the West-German institutions only three technical high schools make first-year mathematics a requirement for professional geologists. Nevertheless, in practice there is usually some pressure put upon students to advance beyond an inadequate school mathematics by

attending lectures and by carrying out set exercises. This method of persuasion is not always successful, and in some institutions it is possible for students to avoid study of university mathematics altogether but the more responsible students, under the sufficiently urgent guidance of their advisers, receive a grounding in analytical geometry, theory of functions, complex numbers, vector algebra, matrix algebra, differential and integral calculus, and the elements of statistics.

It is difficult to generalize about the highly individualistic universities of North America. In some of them it is possible for a student to graduate in geology on the basis only of a slender school mathematics, without further freshman study ; and in a number of them a required course in a first-year general mathematics may include no reference to exponential functions, differential and integral calculus, vector algebra or co-ordinate geometry, or statistics. On the other hand, many of them expect or require their geology students to complete satisfactorily a course in college mathematics that includes analytical geometry and calculus usually exponential functions, and an introduction to statistical methods.

British-based systems, including those of countries in parts of Asia and Africa, and of Australia and New Zealand, embody artificial difficulties, administratively imposed, in any demand they may wish to make for an ancillary mathematics for geologists. Some of them reflect a rigidity of time-table and of subject-classification, as, for instance, when algebra is regarded as a part of pure mathematics, calculus as a part of an independent applied mathematics ; and some are doctrinaire, as in the extreme restriction of subject-combinations in senior secondary schools and universities. In general -- although it is not desired by many teachers of geology -- a university propedeutic course in mathematics for geologists is not provided. The way the administrative machinery works sometimes implies (if not by intention) that advanced school mathematics is ample basis for at least the first years of geological study, or even that mathematics beyond middle-school range (the pupils at 15-16) is not necessary since it is not prescribed. Only under the broader-based Scottish system is there an easy transition for prospective geologists from senior-school mathematics to propedeutic university mathematics, the syllabus of which includes analytical geometry, conic sections, graphics, series, differential equations, and calculus (but usually not statistics).

There is thus some disparity in mathematical background between students of geology in different universities and in different countries, in reflection partly of educational systems, partly of academic standards. This is not wholly accidental. Contrary views on the mathematical needs

of the average professional geologist are not lacking. Even when unsatisfied needs are acknowledged, there is often criticism of a propedeutic mathematics that is planned as a mathematician's mathematics whose orientation and syllabus are internally determined in departments of mathematics. Moreover, a first-year course for future specialists in mathematics, which at the same time must serve as a general-service course for students in all the sciences (of which a favoured physics is the chief), is not very suitable for geologists.

How the disparities are reconciled depends on the form and content of undergraduate courses in geology, and the calls they make on mathematics as an instrument of geological analysis.

Undergraduate geology.

Since geology is not a school subject in most countries, young undergraduates are usually recruited into it for reasons that do not follow from what is instilled into them at school, and that are not conditioned by a formal and constricting alinement of studies that runs from school into university. The reasons are mixed. Sometimes they are negative -- that geology, like biology, is mainly an observational science in which verbal (however technical) description plays a large part, and in which the mathematical complexities and the derivative abstract theory of the physical sciences are minimised and may be largely avoided. But they are also positive, an expression of personal bias and temperament, as when field studies have a precedent appeal over laboratory experiment, and when an enormous time-dimension gives geological process a context that makes geology a particularly attractive part of natural history.

The temper of geology has, until recent years, been almost wholly non-mathematical. Many, perhaps a great majority, of the most distinguished geologists have lacked notable competence in mathematics, and have neither been aware of their shortcomings nor found that they ever needed to mend them. In a sense, geology has grown in a non-mathematical environment partly because its directions of growth during its 19th-century formulation as a science were plotted by non-mathematical geologists. The need for a service mathematics in a geology that is now becoming rapidly quantified is one that is still not recognised in the practice of many outstandingly skilled professional geologists, and that is still not admitted in the undergraduate syllabus in most universities or indeed in the consciousness of either students or most of their teachers in at least the junior university years.

This is not a matter for criticism. The exploratory nature of much geological work is not immediately amenable to mathematical treatment. The artificial imposition of mathematical methods merely to give a

superficial air of precision is often at best marginal in the help it gives. It is sometimes a positive hindrance and may even be wholly misleading in its selectivity, when structures and processes are the product of the interplay of variant factors whose combinatorial effects are not measurable on the available evidence. If a great part of the professional geologist's field studies is exploratory in this sense, he only wastes his time as an undergraduate in learning a supplementary mathematics he is never likely to use.

Undergraduate instruction is heavily weighted in its traditional content by such considerations. The field man, the geological surveyor, has before him a multitude of tasks involving an intimate knowledge of many branches of geology. He must identify minerals and rocks, elucidate (if only crudely) a fossil sequence, unravel structures in faulted and folded terrain, determine the form and relations of ore bodies, assemble data on the likely distribution of groundwater, become a subtly appreciative geomorphologist in acquiring an "eye for country", and organise his heterogeneous information into a comprehensive geological map.

In this work, despite its complexity, all the mathematics he is ever likely to want he has got at school or in his propedeutic year. His petrography may demand a little arithmetic and some elementary statistics (reduced to graphical form) in sorting out grain-size distribution or compositional variation. He may apply the probability laws to some of his sampling techniques. He may use co-ordinate methods of no great complexity in problems of lateral changes in rock-types and rock thicknesses. He may even give precision to some of his geomorphological observations by fitting curves to profiles, though he may be chary of drawing conclusions from his results. His most apposite use of mathematical tools is usually in the resolution of complex tectonic structures displaying multiple deformation, in which the subsurface tracing of a coal seam or an aquifer is commonly a three-dimensional problem demanding, if it is to be solved, some ease in the use of vector algebra (of dip and strike) and of trigonometry. (It is a general complaint of instructors in undergraduate mapwork that the effects of a decline in the school teaching of descriptive geometry as it is replaced by analytical geometry is to produce students who lack the ability both to grasp in their mind's eye the three-dimensional relations of a geological structure and to apply a suitable mathematics to express the relations of its elements).

Instruction in the junior undergraduate years has this traditional background of the competent field man. However they may later specialise, students in almost all universities are given an introduction to geology that has this wide range. It presupposes the need for every

prospective geologist to be sufficiently grounded in minerals, rocks, and fossils, agents and processes, stratigraphy and structural geology, and geomorphology as landscape evolution, and for him to receive instruction in mapwork and to gain some personal experience in geological mapping. If students have completed senior-school mathematics, especially if it is followed by propedeutic mathematics, they are adequately armed to meet all mathematical problems such as a general course in geology is likely to put before them.

It does not follow that as it is now taught introductory geology invokes senior-school mathematics to the best advantage. Thus most general textbooks at present provide a broad view of geology with the use of scarcely a single mathematical formula, and give no thought to refinements in presentation or discussion of process that would follow from quantification. Without any strain being put on the mathematical resources of the students, a little more substance would be given to the verbal statement that, for instance, the size of mineral grain carried by a river is a function of the current velocity when the relation is expressed in a formula or in graphical correlation ; or that the texture of a sediment is reflected in the degree of sorting of its constituents when a frequency curve is used to say the same thing much more precisely (and to allow exact comparison, lost under words, between for example a dune sand, a delta sand, and a beach sand, at levels of significance not otherwise obtainable) ; or that the long profile of a mature river valley approximates to a smoothly concave curve when a calculated exponential equation is shown to match closely a reach of an actual valley.

The advantages of using a simple mathematics where it is appropriate are both the immense methodological gain in a scientific precision, and the pedagogical gain in familiarising the students with the place of mathematics in geological discussion. At the same time it must be recognised that at elementary stages they would not greatly increase the students' understanding of geological processes.

Even in senior undergraduate years a descriptive geology may adequately fill the syllabus and need no more than senior-school mathematics for its expression. It is still possible to specialise in branches of geology and to carry out highly original research without ever invoking mathematical apparatus beyond simple algebra -- in the petrography of suites of rocks, for instance, or in the correlation of structure with function in the anatomy of fossil vertebrates, or in the determination of the subtle effects of stratigraphical facies changes on zonal sequence, or in the description of alpine-type structures. Disparagement of such work merely because it is non-mathematical, or of a student's desire to carry out similar work, is wholly misplaced.

It is true that the parts of geology in which mathematics continues to occupy an insignificant place are becoming progressively restricted. The student who hopes to do advanced work of technological rather than technical quality may shortly need to exercise a sharp ingenuity in steering a course into postgraduate studies or professional life solely on the strength of a senior-school or propedeutic mathematics. Meantime, however, it must be accepted that highly skilled specialists can be trained in certain fields of geology without ancillary mathematics of university standard.

There is, nevertheless, a wide difference between finding a chosen field of study not to need mathematics, and choosing a field of study in order that mathematics shall not be needed. What cannot any longer be accepted is that the student without mathematics should be regarded as the norm, and that the undergraduate course should be moulded to his limitations. The individual student may happily and successfully follow a course of study plotted along paths selected partly to allow him to avoid other and rapidly expanding fields of geology in which the geology is reinforced by mathematics ; but in his ignorance of mathematics he is to be looked upon as exceptional, not an example or an encouragement to other students, when some advanced studies at the senior undergraduate level becomes possible only if the geology is nurtured on an appropriate mathematics.

It is a disservice to the generality of students on the one hand and to scholarship on the other to pretend that a balanced university geology can be satisfactorily covered without further training in mathematics, or that specialist fields are any longer safe from the encroachment of a relatively advanced mathematics simply because they have been sheltered in the past. Nor should there be any attempt to soften training in university geology by an undue emphasis on those parts of the subject or by adopting only those methods that allow a desirable mathematics to be glossed over.

The insufficiencies of a school mathematics having been taken for granted in applied geology for many years, they should now be recognised and removed in many branches of "pure" geology also.

Applications of mathematics.

The range of specialist branches of advanced undergraduate study, reflecting the multifarious contacts of geology with the other sciences, spans a wide spectrum -- from zonal stratigraphy to geophysics, from palynology to igneous petrology. There is thus no common pool of a service mathematics that uniformly supplies all branches, and specialist

needs are empirically discovered in the exercise of the specialism. The ways in which mathematics has been found to be useful, and the advantages of following them, are only now beginning to be systematised.

Thus until very recent years, palaeontology has not been greatly influenced by mathematics. It is still common practice to regard verbal description as adequate in a typological identification of fossils. The limitations of a naive and subjective criterion of likeness become evident, however, when the morphotype appears as the incidental individual in a sample that contains many variants ; and the treatment of the abundance of specimens found at different localities and at different stratigraphical horizons, or in a single collection from a single bedding plane, can no longer be satisfied by a classificatory naming based on arbitrary judgement. The species in Platonic view is still no doubt the kind, the taxon, of which the individual "type" specimen is the sign ; but the affiliations of the individual are no longer satisfied by an identification of its species (usually in the two words of its Linnaean name) when in fact its affiliates are found in its company as a fossil population.

The transfer of emphasis from the specimen, even the " type " specimen, to the population, takes much of palaeontology into the world of statistics. Two immediate tasks arise -- the definition of the sample, and the comparison of similar samples. Both involve a co-ordination of parametral observations, controlled by a determination of levels of significance, modes of variation, inter-dependence of correlative "characters", and cross-tests of parallel variance (the last usually by bivariate analysis, which can be extended into a complex multivariate analysis, whose results, however, are not always sufficient compensation for the tedious calculation involved). The comparison of samples may incorporate a comparison of young and old growth stages in the specimens of each population, and add a refinement to bivariate studies and a dynamic element to studies of form changes in the allometry of ontogenetic growth[1]. A statistical comparison (enriched by regression equations) of populations in stratigraphical sequence or in lateral range gives an extended meaning to variation and to the type that conforms more nearly to the distribution range of a real species in its real occurrence.

It is now notorious that several morphotypic species have repeatedly been shown to have no more validity than indicental differences in shape give them, when they belong to a single taxon statistically defined ; and

1. See, for instance, Imbrie, J. 1956. Biometrical methods in the study of invertebrate fossils. Bull. Amer. Mus. Nat. Hist., vol. 108, pp. 215-52.

that the supposed differences between successive "species" of an evolutionary or cladogenic lineage are sometimes equally ill-founded or at best phenetic ecotypes.

Derivative theory on processes of evolution may have radical effects on the classification of fossils. A mechanically constructed "numerical taxonomy" perhaps has little appeal to traditionalists ; but the principles on which it rests, and the validity of its purpose when it is intelligently applied, are of importance in the instruction of undergraduates who are as yet almost wholly constrained by Linnaeus and have little concept of the significance of fossil names when they apply a Linnaean nomenclature.

The biometrics of fossils is scarcely less useful in its application to a stratigraphy that rests on palaeontological correlation. The index fossil of stage or zone is a close analogue of the type specimen ; and the strength of the fossil assemblage, the additive suite of index fossils, lies in the limits of confidence applicable to the independently distributed species composing it. Even when a list of (Linnaean) names (prepared by the "competent systematist") of the members of an assemblage is acceptable, the degree of valid stratigraphical correlation between one list and another is only statistically determinable. It rests on many factors, including the vertical and lateral range of each species, and the palaeoecological controls on the distribution of the individual members of each species both before and after death and at various stages of individual growth. Not all these factors are fully measurable, but their influence must be assessed and weighted in the specific example if the acceptability of the correlation is to be assured. Granted an accurate taxonomy, stratigraphical method is then potentially able to prepare a frame of parametral equations of species-distribution to whatever degree of detail is possible on the available evidence, and to set up a standard stratigraphy, generalised and no doubt idealised in its form but not in its basic contents and freed of the subjective impressions of "acmaic" species abundance, to give progressive refinement to a precise stratigraphical correlation. The theoretical possibilities should not be allusively presented to the undergraduate but should be shown to lie beneath the statistical protection of a valid mathematics whose methods he understands.

Essentially the same statistical methods apply to the analysis of samples of mineral suites in studies of the composition (and origin) of rocks (in one aspect fossils, and fossil assemblages, being themselves no more than particular kinds of rock constituents). The subtleties of depositional mode, product of the combinatorial interplay of many factors variously expressed, have their final embodiment in the physical rock-specimen of the petrographer. It is his task to extrapolate from

the present instance to the past environment, and to justify inference on the precision of his analogies. Ultimately his identification of rocks, framed in a classification that combines physical properties with mode of origin, rests on his ability to express the nature of the rocks in terms that adequately embrace their bulk characteristics along as many parameters as he may care to invoke. In great part, such analysis rests on comparison of samples, whose validity is accepted on objective tests of confidence and significance ; and the reliability of the analysis is proportionate to the thoroughness with which the sampling is undertaken and the perspicacity of the analyst in choosing the most appropriate and relevant parameters for measurement.

In a laying-out of the evidence, the mapping of comparisons (or other related data) -- which may be an orthodox geographical mapping in a scatter of observations or derived functions each pinned to its physical locality, or a mathematical mapping in an arbitrarily organised system -- is then a skilled exercise in field work that takes the conclusions to any degree of refinement the available data allow. Commonly the maps are of second-order ratios, as in the plotting of lateral variation in the constituents of a rock, or of gradients, as in the two- -and three- dimensional determination of trend lines and trend surfaces. The isopleth contours express inferences in terms of confidence limits.

Not only does the student come to realise that he obtains new information, and information not otherwise accessible, by such methods. He also realises that the nature of the information, obscured by the positive assertions of subjective judgement, is not to be assessed as true or false, but as approximating in degrees of probability to a conceptual reality that becomes the constructed corpus of his science.

The methods are applicable to any conveniently segregated constituents or measurable proportions of the rock or rock-suite studied and are (as methods) not limited to fields in which, as it happens, they have been most often used. Their value in analysing sediments has long been recognised, and they have added a rigour in descriptions of mineral constitution and grain-shape and grain-size that makes them now a usual element in the laboratory equipment of the specialist petrographer. Most common in discussions of clastic accumulates, their use may be extended to studies of such secondary metasomatic changes as the recrystallisation of limestones, or the pressure-welding of arkoses, or molecular interchange in dolomitisation gradients ; and to studies of the cycle of deposition in a playa or the distribution of manganese nodules on the sea floor. They have obvious relevance in stratigraphy, being admirably adapted to the precise expression of facies and sequence changes tested by variations in thickness and lithology of a unit sequence, or by the laterally changing composition of a marker band, or by the migrating

modal index or multiple indices of a fossil assemblage.

Though less often used, they are equally of value in igneous and metamorphic petrology. Covariant associations of minerals or elements are signs of process and migration in the differentiation of consanguineous rocks from a parent magma. Trend analysis in the mass of an intrusion is a rewarding means of testing theories of petrogenesis or magmatic turbulence or multiple injection. A petrofabric probe into the preferred orientation of minerals and properties reveals the polarising of stress in the formation of metamorphic linear and planar structures, or in the primary or secondary alinement or imposition of such anisometric properties as remanent magnetisation or powers of electrical and thermal conductivity.

The measurements on which the methods depend are of any property that is measurable. They can be made on directions of striae on a glacial pavement, of foreset bedding in a delta deposit, of heavy-mineral banding in a peridotite, of dominant strike in a joint system. Applied to (and enriching) an understanding of landforms, they are a basis for a morphometry that collates the effects of erosive agents as seen in the segmentation of a landscape into drainage basins and of a coast into bays and headlands. By hypsometric integration they promote a comparison of surfaces to test hypotheses of landscape evolution. Elaborated in different ways, the methods can be utilised to determine multidimensional series of changes in many kinds of regression surfaces. They thus help in distinguishing between large-scale regional or "systematic" variations on the one hand, and local components of variance on the other -- local component that as "noise" tend to obscure the basic gradations of change.

The methods are many-sided in their adaptability. Their pragmatic justification is their use as tests of alternative hypotheses when probabilistic expectations are matched with the statistical similarities of real samples. In all fields, as aids in the construction of best-fit models, they are a foundation of strength in theoretical inference/[1].

The problems of tectonic analysis, partly met in a resolution of structural elements by statistical methods /[2] and by a descriptive geometry, fall into fields of mechanics and dynamics when stress-strain relations become a dominant interest. In "brittle" deformation the nature

---

1. See Krumbein, W.C., & R.L. Miller. 1956. Design of experiments for statistical analysis of geological data. Journ. Geol., vol. 61, pp. 510-32.

   A comprehensive text is Miller, R.L., & J.S. Kahn. Statistical analysis in the geological sciences. New York. 1963.

2. See Adler, R., W. Fenchel, & A. Pilger. Statistische Methoden in der Tektonik. Clausthal. 1959.

and pattern of fracture may become complex in major rifting or in anisotropic fold belts ; but the application of an Andersonian model provides a good qualitative approximation to the association of cross-faults, thrusts, and tears that is usually to be recognised as congeneric in the shallower tectonic levels of an orogen. The analysis, illustrated by the stress and strain ellipsoids, is however essentially descriptive. The Andersonian steady state is a net terminal product, the several complementary factors contributing to the deformation not being easily resolved. The multiple solutions possible, depending on the vectorial relations of the stresses, are to be derived from the geometry of the components of fracture (the trends of the fracture-planes being a function of stress alinements) and from the mechanism of strain in an anisotropic medium of rocks whose intrinsic "strengths" are in principle amenable to measurement.

In folded rocks, characterised by "viscous" and "plastic" flow, analysis is more difficult. It includes analysis of the modes of deformational shape-changes that in terminal state need to be unravelled in a reverse history. This is a complex study of the segments of an orogen whose tectonic history, spanning several geological periods, often includes a multiple overlay of successive fold-impulses variously orientaded, and a corresponding stratigraphical anisotropism marked by repeated strong unconformity and facies change. It invokes a vector algebra whose data are field observations on the alinements of dip and strike of bedding, fold axes and axial planes, cleavage, lineation as the intersection of structural surfaces, and fold patterns. It also includes an analysis, more uncertain because of the many independent variables, of a crustal rheology extrapolated from laboratory physics that in its essence merges into geophysics.

When there is no loss of volume under directed stress -- there almost always is a loss of volume, by expulsion of contained water, by a closing of rock pores in mineral deformation and mineral regrowth, and by thermodynamical changes in mineral species displayed as progressive metamorphism -- the deformation may be referred to the ordinates of a triaxial space, transformations in shape being theoretically expressible on a vector or cartesian grid. Transferred to process, the shape-changes whatever they may be as empirically determined by field observation, fall for consideration into the science of strength or materials. They ultimately rest on the imposition of strain beyond the elastic limit in rupture along mineral contacts, or within the lattice of mineral crystals, or in mineral transformations that relieve the stress by radical metamorphism. The geometry, and the inferred stress-pattern, become elusive when the stratigraphical anisotropism is reflected in a disparate structural habit

between contiguous "competent" and "incompetent" beds, and in a differential resistance to strain between successive beds of different mineral composition or grain size. They become still more obscure when the form of visible folds is in part a function of the load under which the folds were imposed, the load being extrapolated from peripheral outcrops where the stratigraphical evidence is not completely destroyed, calculated where the type of folding or the grade of metamorphism alone provides the evidence on which the load is posited.

A study of orogenesis thus incorporates the physics of the rheological equations of state (derived ultimately from Hooke's law, the buckled folds always exceeding the limits of elastic strain of the rocks folded and buckling plasticity replacing brittle fracture), the contrasted effects of short-interval and long-interval stresses, the nature of the medium folded, the depth at which the now-visible folds were developed, and the form of the containing frame in which the stresses were imposed. It also leads to a study of the origin of the forces reflected in the folds (and faults) -- a subject more usually considered under geophysics than under a crustal structural geology.

A quantitative discussion of these topics, however stylised it may be by the use of models in which assumption may take the place of as-yet-undiscovered factual evidence, invokes extrapolation from the observed to the inferred, for which the necessary mathematics includes both fairly advanced numerical analysis and differential and integral calculus. Not all undergraduates need to go deeply either into evidence or into calculation, but every student who attempts to understand the significance of tectonic theory needs to have some appreciation of the mathematical analysis on which the conclusions he is prepared to accept are based.

The extension of stress physics to the study of rock-change also involves some acquaintance with the thermodynamical controls on rock-origins and rock behaviour. The crystallographic expression of such controls is well enough understood in principle (though it is not often taught), both in the "strength" of the crystal lattice whose frame is held together by a bonding force that is a function of temperature and pressure, and in phasal suites of crystals -- the "mineral assemblages" of the petrographer's rocks -- that are a measure of the equilibrium conditions of formation and of sustained stability fields in a changing geological context. Less thoroughly studied but not less relevant to undergraduate study is the thermodynamics of precipitation of evaporites from "cold" bitterns, whose analysis involves not a little knowledge of the calculus.

How far a surface-rock physics should be extended in a balanced geology course to become a systematic geophysics is differently answered in different countries and in different universities. To require the undergraduate in geology to become a fully professionalised geophysicist is no doubt excessive ; but it might properly be expected of him that when he uses geophysical evidence or interpretation in his geological arguments he should be well-informed in the nature of the evidence, which is usually indirect, and of the mode of interpretation, which is mostly mathematical.

The field is formidably wide-ranging. It subsumes orogenesis under comprehensive dynamical theory that attempts explanation of asymmetrical stress and strain relations throughout the crust. It relates the geochemistry of sial and sima to inferences of isostasy and to ocean-continent contrasts. It integrates seismological, palaeomagnetic, and palaeotectonic evidence as a pointer to continental drift. It derives theories of Earth shells by layered differentiation, and of continental history by sedimentary accretion and disruptive fragmentation. It extends the theories to explain the dynamics of crustal deformation by heat transfer in the cells of convective currents. Much of geophysical theory is no doubt speculative; but it has direct and insistent bearing on an expanding geology and cannot be neglected in an undergraduate instruction that emphasises structural geology -- nor therefore can the mathematics on which it rests be neglected. The mathematics is relatively advanced ; its main elements include co-ordinate geometry on a sphere, trigonometric functions, series, and differential and integral calculus/[1] .

Little attention has hitherto been given to quantified geological process in the geomorphological analysis of landscape and of landscape evolution. No doubt this is partly because process is almost always multiple, and to segregate the several contributory factors (as independent variables) with any precision is difficult. Description has thus concentrated on the stages of change in landform, which often may be determined with some confidence by direct analogy or by altimetric and profile correlation. Inference has been alined towards a matching of inductive or theoretical or idealised process (to which landform itself may provide a clue) with geomorphological models that represent the events of a filled-out history. An acquaintance with the mathematics of exponents is generally basis enough for such work.

---

1. For a general conspectus in which mathematics is neither neglected nor over-elaborated, see Scheidegger, A.E. Principles of geodynamics. Berlin. 1958.

The ill-balance of a geomorphology of this type is obvious when a vague reference to fluviatile erosion (as agent), or a tacit neglect of how rivers erode, may then appear as a poor complement to the precise exposition of the sequence of events of valley-form moulding, adjustment to geological structure, rejuvenation, piracy, and integration that reveal the evolution of a drainage system. For fluviatile erosion (and aeolian, glacial, and marine erosion, and their depositional counterparts) are physical (and chemical) processes that in approximations of various degree are amenable to measurement. The empirical evidence of regime, collected from illustrative examples of individual rivers or dunes or glaciers or beaches, provides the basic material for undergraduate analysis. When the undergraduate has a sufficient grounding in an elementary physics (and chemistry) he is not without the potential ability, if his mathematics can be made equally sufficient, to give an explicit measure to process.

The evidence is mostly to be interpreted (in essence as in structural geology) by reference to the mechanics of strain and stress, and to the elements of hydrodynamics in the "work" of streams (air or water or ice), when in turbulent or laminar flow or in wave pulses they reach a critical stress point that makes them competent to erode the rocks of their floor and to transport material as bed load or suspended load. The student then needs to collate the empirical record of actual streams and deposits with the empirical formulae that profuse to bring order to the observational data. He also needs -- if he wishes to interpret, or at least understand, argument and inference -- an adequate equipment of differential and integral calculus, and of co-ordinate and vector geometry with some trigonometry, that parallels the equipment of the structural engineer. Indeed, much geomorphological analysis borders on the theoretical activities necessary in studies in engineering, reservoir hydraulics, coast protection, soil mechanics (notably of landslides and of hill-slope and cliff-slope formation and recession), and the stability of foundations[1].

In the more exotic branches of geomorphology, as in a study of submarine or subglacial landforms, the attribution of abnormal qualities to canyon-cutting turbidity currents or to valley-gouging glacier flow must rest on calculated or empirically determined real properties that may be mathematically extrapolated, and be given a probable quantification, by applying modified Chezy-type equations in the one field, Weertman- and Lliboutry-type equations in the other. Undergraduates then learn that the effectiveness of the agents, and the ways in which they work, are not to be glossed over by allusion or invocation a priori

---

1. See for instance Scheidegger, A. E. Theoretical geomorphology. Berlin. 1961.

but follow -- if they follow -- from the stringency of the analysis. They also learn that their analysis, even if it is never precise, must be founded on an ability to manipulate differential equations.

The teaching of ancillary mathematics.

It is not easy to prescribe the ways in which instruction in a service mathematics may be introduced into the post-propedeutic curriculum when its usefulness is recognised only as it is found to be needed in divergent and increasingly specialist branches of a rapidly developing geology. Still less is it possible in a present instruction of undergraduates to foresee what they are likely to need in five or ten years after entering professional life. A service mathematics that is immediately appropriate thus should not be conceived of merely as being useful ad hoc. It should allow the students themselves, when the future occasion arises, to build upon it and to apply their mathematical knowledge with some originality and independence in novel ways and novel situations.

It is evident from the examples given that often the manipulation of specialist problems does not require a mathematics greatly in advance of what the students acquire in a propedeutic or even in a good senior-school course. Only a little prompting is needed to draw the students out of a passivity that hedges their mathematics with functionlessness. Supplementary instruction can then be largely designed to refresh and extend the knowledge the students already possess, and to elicit their interest in new fields and in new modes in which their knowledge may be applied.

An enlarging comprehension of mathematical potentialities emphasises in the students' minds something of the qualities of a mathematician's mathematics and helps to break down the unscholarly view of a service mathematics that is no more than a convenience available in stereotyped contexts for mechanical application. It is to be encouraged if only because as he needs the mathematics the student becomes technically more competent in the freedom of his applying it. At the same time, the purpose of the supplementary instruction is primarily to be useful. Most students must be persuaded of its usefulness if it is expected that they should respond to it eagerly. An academically unrestrained mathematics is then out-of-place. This is particularly so when the immature student is tempted to parade a decorative mathematics in the way he handles a geological problem, not realising that indeterminate factors or variables make spurious or pretentious an air of precision in formula or inference. Part of the instructor's task is to ensure that students acquire judgement in recognising a relevance in the kind of mathematics they apply, and the weight of mathematics a problem can usefully bear.

The normal full-session course in mathematics at a second-year (sophomore) level is thus not always suitable as ancillary to geology, even when the time-table can find a place for it. It is both far too wide for geological needs and too remote in its relevance to geological problems. On present signs, the particular needs of the geologist in an advanced mathematics, beyond those met by a fully extended senior-school or propedeutic mathematics, and other than those of specialists in some branches of applied geology and in geophysics, are in

1. analytical geometry, including an improved facility in the use of vector methods ;
2. aspects of set and group theory ;
3. functions and series, and numerical methods ;
4. relatively advanced differential and integral calculus and partial differential equations, more especially in their applications to the mechanics and dynamics of rock deformation under various conditions of stress, to the mechanics of geomorphic processes, and to thermodynamics ;
5. probability theory (critically and analytically introduced), and a thorough grounding in the probability laws and in the use of statistics in population and sample studies ;
6. advances solid geometry, descriptive geometry, and an introduction to topology ;
7. computing methods and the use of the computer (this is scarcely formal mathematics, and instruction in it is in how to use a machine).

If the instruction given should be scholarly in resting on mathematical principles and not dominantly on pragmatically useful formulae, it should no less have a strong bias towards applied mathematics, and in part it should merge with aspects of physics and invoke physical laws in geological interpretation.

These limited and selected parts of a broad-based developing mathematics are not easily integrated and unified to fall into the single span of a session's course that is mathematically orientated. Nor do they include all or much of the mathematics required by undergraduates specialising in physics or in chemistry. Moreover, not all senior undergraduates in all universities engage in advanced work in the whole field of geology or then want instruction in all the major sections of mathematics listed. Nor are the mathematical needs begun to be felt until the penultimate

year of the undergraduate course (the third year in North America, the fourth year in eastern Europe). It is therefore undesirable, and usually impracticable, to merge geologists with physicists and chemists in a common post-propedeutic course in a broad-based mathematics of a session's duration -- although it might well be administratively convenient to offer some joint courses (notably in statistics) for geologists and biologists.

The needs of the geologists are best met by short courses arranged ad hoc, in which the mathematics is orientated, in content and in the use of appropriate examples, to meet the particular needs as the needs appear. This is a kind of sectional mathematics that is often provided in specific courses for credit offered in many North-American universities ; and it is a kind readily adapted to the co-ordinated courses of the self-contained system of instruction in east-European universities. Elsewhere, however, notably under the English system, it puts a direct burden on the goodwill of the teachers of mathematics in its demand for a service mathematics they might be reluctant to provide. The alternative is to have the mathematics taught by a competent geologist. This is a practice adopted in some universities especially when applied geology is emphasised in the instruction. It gives to the mathematics an immediacy particularly convincing to the students, who are always inclined to identify the propriety of what is taught with the teacher ; and it allows exceptionally close integration of the mathematics with the geology. But only the occasional geologist is competent enough in mathematics to teach mathematics, and even when he can be found it must be conceded that the mathematical scholarship and principles lying behind the instruction are more likely to be sustained by a sympathetic mathematician sufficiently prompted in the geologists' needs.

Acknowledgements.

This report is sponsored by UNESCO. It was prepared under the auspices of the Commission on the Teaching of Geology of the International Union of Geological Sciences. Its substance was discussed in January 1965 at the Dakar Conference of the Inter-Union Commission on the Teaching of Science. It should be understood, however, that none of these bodies is to be held accountable for the statements made in it, for which the author alone accepts responsibility.

Acknowledgement is made with gratitude of the information and critical comments on the topics of the report contributed by Pierre Bellair (Paris), A.J. Frueh (Montreal), T.W. Gevers (Johannesburg)

E.S. Hills (Melbourne), W.J. Jacobson (New York), Sheldon Judson (Princeton), John Imbrie (New York), W.C. Krumbein (Evanston), John S. Patton (Bloomington), L.J. Mostertman (Delft), Andreas Pilger (Clausthal), Zdenek Pouba (Prague), I.N. Sneddon (Glasgow), and E.K. Walton (Edinburgh) -- none of whom, it need scarcely be said, is necessarily in agreement with all the report contains.

University of Glasgow
Glasgow, W.2.
Scotland, U. K.

Résumé de l'article :

LES MATHEMATIQUES ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOLOGIE

T. Neville George

Le niveau de l'enseignement secondaire en ce qui concerne la géologie et les mathématiques varie largement d'un pays à un autre, et, au sein d'un même pays, d'une école à une autre. La plupart des étudiants en géologie se sentent incapables de faire le lien entre leurs connaissances mathématiques et géologiques ; ceci reflète le manque d'exemples appropriés dans les cours de mathématiques et l'absence de livres d'étude s'adressant plus particulièrement aux géologues. Une pédagogie reformée devrait assurer l'intégration des connaissances à tous les niveaux.

Un cours de mathématiques pour géologues devrait ainsi comprendre:

1. des éléments de géométrie analytique et le calcul vectoriel,
2. l'introduction à la théorie des ensembles et des groupes,
3. la théorie élémentaire des fonctions (en particulier des fonctions trigonométriques) et les méthodes numériques,
4. le calcul différentiel et intégral, les équations aux dérivées partielles et, plus particulièrement, leurs applications à l'étude exacte de la structure des cristaux, aux processus tectoniques, à certaines parties de la géomorphologie, à la thermodynamique de la formation des rochers, à la diagénèse et au métamorphisme,
5. la théorie des probabilités et son application à la statistique dont l'emploi est nécessaire dans presque toutes les branches de la géologie,
6. de bonnes bases de géométrie dans l'espace, de géométrie descriptive et une introduction à la topologie - matières dont l'emploi se fait particulièrement sentir dans l'étude des processus tectoniques,
7. et enfin les méthodes de calcul et l'emploi de machines à calculer.

Il semble souhaitable que l'enseignement des mathématiques soit dispensé, soit par un mathématicien qui a une bonne connaissance des problèmes et des besoins des géologues, soit par un géologue dont la

culture mathématique est reconnue. Il ne fait aucun doute, en effet, que l'enseignement est peu efficace lorsque l'étudiant doit, de lui-même, extraire du cours de mathématique générale ce dont il a besoin.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, DE LA PHYSIQUE ET DE LA CHIMIE A L'USAGE DES BIOLOGISTES

René Heller

I. L'inventaire des besoins.

A. La position du problème.

Que les Sciences Naturelles soient largement tributaires, au moins dans certains de leurs domaines, de la Physique, de la Chimie et à un moindre degré des Mathématiques, c'est une idée qui n'est pas neuve. Elle est déjà à la base de la classification des Sciences d'Auguste Comte. Il n'empêche que, chaque année, se présentent dans les Facultés de nombreux étudiants qui viennent en Sciences Naturelles à la suite d'un choix négatif. Portés vers les Sciences, par goût ou par intérêt, mais se sentant à tort ou à raison inaptes aux Mathématiques et aux disciplines qu'elles commandent, ils espèrent pouvoir faire des Sciences Naturelles valables avec un bagage dérisoire en Mathématiques et en Sciences physiques, sans le désir, ni même souvent la possibilité de l'accroître.

Cette contradiction ne provient pas seulement d'une information insuffisante. Elle relève aussi de la complexité et de la variété des faits biologiques, qui offrent un large éventail de possibilités d'études et se laissent approcher par des esprits de tendances très différentes. Les uns sont plus portés vers l'observation , qui tend à tirer des conclusions de l'analyse et de la comparaison des phénomènes naturels ; les autres préfèrent imaginer des hypothèses qu'ils soumettent à l'expérimentation. D'un autre côté, partage qui ne recouvre pas exactement le précédent, les uns sont plus portés vers l'examen des caractères qualitatifs, tirés de l'observation ou même de l'expérience (morphologie expérimentale, par exemple), les autres ne s'estiment satisfaits que s'ils ont traduit les faits par du quantitatif , même ceux qui leur sont fournis par la simple observation. Enfin, troisième critère distinctif, les uns sont surtout tentés par la manipulation pratique et le raisonnement concret, tandis que d'autres, plus aptes à l'abstraction, se plaisent surtout dans l'approche théorique des problèmes .

Il n'y a pas de recouvrement précis des lignes de partage ainsi dégagées : la paléontologie, qui ne peut être expérimentale, n'en est pas moins quantitative ; l'écologie, initialement basée sur l'observation, est

devenue de plus en plus expérimentale ; la biogéographie, descriptive et pourtant quantitative, fait en outre appel à des traitements théoriques très délicats pour rendre compte de l'évolution des faunes et des flores.

L'ensemble des disciplines biologiques représente en somme un large éventail de nuances qui s'interpénètrent et se fondent les unes dans les autres. Mais, si nous ne pouvons y distinguer de catégories bien précises, à envisager séparément, il nous faut pourtant prendre acte de l'ampleur de cet éventail ainsi ouvert, dont l'une des branches extrêmes pourrait être représentée par la biologie "d'inventaire" qui poursuit la prospection du monde vivant, et l'autre par la biologie moléculaire ou toute autre discipline, aussi profondément qu'elle expérimentale, quantitative et théorique.

Dans cette situation, plusieurs points méritent d'être dégagés pour ce qui nous occupe.

I. Tout d'abord, dans les sciences biologiques l'inventaire est loin d'être terminé. Particulièrement dans les pays en voie de développement où le matériel biologique est d'une richesse et d'une originalité exceptionnelles, la prospection du monde vivant est d'un intérêt qui n'est pas près de s'épuiser. Plus généralement, dans de nombreux secteurs (infra-structure cellulaire, différenciation et organogénèse, relations de l'être vivant avec son milieu) le dépouillement préalable des faits et des facteurs en cause peut encore apporter bien des indications précieuses, susceptibles de suggérer expériences et interprétations théoriques.

Il ne faut donc pas croire que les branches les plus descriptives - ou si l'on préfère les plus qualitatives ou les plus concrètes - de l'éventail doivent être tenues pour inutiles et condamnables.

II. Cependant, il est clair que la Biologie, comme toute Science est sous sa forme la plus élaborée, expérimentale et quantitative, car, en fin de compte, une explication ne peut être tenue pour vraie que si elle est prouvée par le contrôle de l'expérience ; un phénomène n'est vraiment compris et analysé que s'il est traduit par des grandeurs et des relations mathématiques, enfin qu'un système n'est parfaitement compris que s'il est intégré dans une théorie qui l'explique et le situe. Ainsi, au fur et à mesure que la Biologie progresse, la branche "inventaire" se rapproche-t-elle des autres par son esprit et ses méthodes ; de plus en plus rares sont les apports importants de la description pure, étant pourtant bien entendu qu'il ne s'agit jamais d'une simple contemplation,

mais d'une analyse active et intelligente, en vue de découvrir rapports et mécanismes. Le mouvement est déjà fortement amorcé et il ne peut que s'amplifier.

III. Autant par cette évolution naturelle que par celle qui peut accompagner le travail de l'esprit, il n'est pas possible d'affecter définitivement un chercheur à une branche donnée de l'éventail. Plus descriptif à un moment de ses recherches, il peut parfaitement souhaiter évoluer dans un sens plus théorique et expérimental, dans la mesure où sa formation le lui permettra.

IV. Enfin, de plus en plus, il se révèle plus aisé et plus efficace, pour enseigner les bases de la Biologie (1er cycle des Facultés inclus), de renoncer à l'ordre historique et d'envisager successivement les différents niveaux d'intégration : niveau moléculaire, cellulaire, de l'organisme, et enfin de la population et de la biosphère. L'accent est donc d'abord mis sur les analogies avant de faire apparaître les différences et les spécialisations. Ce qui ne préjuge nullement des importances attachées ensuite, au niveau du 2ème cycle des Facultés aux diverses disciplines. Il est sans doute préférable, pour les pays en voie de développement, de faire porter les énergies disponibles sur les branches qui sont le plus directement en rapport avec la santé, l'hygiène, l'alimentation et la culture, plutôt que sur les disciplines qui, comme la biologie moléculaire, exigent des moyens beaucoup plus puissants, et ont des conséquences pratiques moins immédiatement sensibles. Il n'empêche que, pour assimiler cet enseignement de base, souhaitable pour tout biologiste, un minimum de bagage mathématique, physique et chimique est indispensable, sans oublier la formation d'esprit qu'il entraîne.

En définitive, les constatations précédentes obligent, dans l'élaboration des programmes, à tenir compte de deux séries de données. D'une part, le large éventail des disciplines actuelles, dont l'intérêt n'est pas contestable, rend difficile une formation unique et homogène. D'autre part, l'interpénétration de ces disciplines, leur évolution nécessaire dans un sens plus expérimental, quantitatif et théorique, la nécessité d'assurer à tout chercheur la possibilité d'une certaine réorientation de ses recherches, enfin, le besoin d'un minimum de formation mathématique, physique et chimique pour tout biologiste, exige la présence d'un "fonds commun".

La formule la plus simple consiste donc à prévoir deux niveaux, l'un de base, commun à tous, et qui serait à atteindre à la fin de la première

année de Faculté ; l'autre, réservé aux étudiants des branches, que nous pourrons appeler "quantitatives" en donnant à ce mot un sens très large, est à atteindre la deuxième année seulement.

Sans doute, dans certains pays, où les conditions d'enseignement sont particulièrement favorables, on peut envisager de faire suivre les deux niveaux à tous les étudiants. C'est une formule ambitieuse, qui a ses risques, mais aussi ses avantages : une culture mathématique, physique et chimique un peu poussée, ne peut nuire. De même, rien n'interdit, si l'organisation de l'enseignement l'exige, que les deux niveaux soient préparés dans une même année. Les observations suivantes, qui séparent, pour la clarté, les deux types d'enseignement, restent évidemment valables.

Dans la première partie de ce rapport, nous n'examinerons que les besoins - au premier niveau, au deuxième, puis dans quelques cas particuliers (enseignants du second degré, médecins, agronomes, etc.) - réservant pour la section suivante l'étude des procédés pédagogiques destinés à les assurer.

B. Les besoins au premier niveau.

- Nature des besoins.

Même pour les biologistes qui seraient décidés à ne faire que de la biologie purement descriptive, les besoins en sciences - supports - ne sont pas nuls, contrairement à ce que l'on pourrait penser. Tout biologiste demande en effet aux sciences mathématiques, physiques et chimiques, des services de trois ordres :

1. des données de base, dont ils ont à se servir d'une manière ou d'une autre. Par exemple, il leur faut savoir ce qu'est une dérivée, une exponentielle ; en physique, ce qu'est le travail, un phénomène périodique ; en chimie, ce qu'est un acide, un ion, le pH, etc.

2. des techniques, qu'ils ont à utiliser telles quelles, calcul trigonométrique, notions d'électricité leur permettant un montage simple, optique, méthodes d'analyse chimique, etc.

3. une éducation de l'esprit, dans le sens de

- l'élaboration et de l'expression correctes des résultats (dépouillement et "réduction" des données), des hypothèses, des conclusions ;

- la rigueur dans le raisonnement déductif, sachant aller pas à pas de l'hypothèse bien posée à la conclusion, avec d'éventuels prolongements sur des nouvelles hypothèses de travail ;

STATE INSTITUTE OF EDUCATION ★ BANIPUR ★

- la critique d'une expérience, les notions d'erreur et d'approximation.

- Principes directeurs.

On voit donc, devant de tels besoins, que s'il faut évidemment ne s'appuyer que sur la science moderne, et non périmée, il n'en faut retenir que du sûr et du permanent. On écartera par conséquent les difficultés théoriques, comme en soulèvent par exemple la géométrie analytique, la mécanique ondulatoire ou la liaison chimique, quel que soit l'intérêt de ces domaines.

On n'hésitera pas non plus à ne retenir que du directement utilisable, en ne cherchant pas à fonder une donnée sur des justifications trop lointaines, ni à la prolonger par des conséquences d'un intérêt pratique moindre. Par exemple, le deuxième principe de la thermodynamique peut, pour cette catégorie, se limiter, sur le plan physique, à l'idée de dégradation de l'énergie et des pertes thermiques obligatoires et, sur le plan chimique, à la notion de l'énergie libre, sans montrer l'équivalence avec la forme précédente, ni introduire la notion d'entropie, ni évidemment donner aucun procédé de calcul des variations des potentiels thermodynamiques.

Enfin, dans le choix des chapitres, il faudra se limiter à ceux qui sont les plus directement nécessaires, à l'exclusion des autres : l'acoustique, le magnétisme, l'électrostatique ont pu, au niveau secondaire, faire partie du bagage général, mais il est certainement inutile de les reprendre à nouveau.

C. Les besoins au deuxième niveau.

Il s'agit cette fois-ci non plus du minimum de bases nécessaire à tout géologue, mais de connaissances, qui, tout en restant utiles à tous sont néanmoins plus spécialement indispensables à ceux dont le domaine d'étude exige par essence l'expérimentation (biochimistes, biologistes moléculaires, physiologistes, généticiens), et à tous ceux qui, dans les disciplines plus descriptives introduisent le quantitatif par l'expérience (ex : morphologie expérimentale) ou par l'observation (ex : écologie, biogéographie).

- Nature des besoins et principes directeurs.

Ici, les besoins recouvrent évidemment ceux de la catégorie précédente, mais :

1. Ils sont nécessairement plus vastes et plus précis. C'est ainsi que dans le domaine des Mathématiques, les biologistes expérimentaux doivent non seulement demander à celles-ci une méthode intellectuelle de description d'un fait ou d'un rapport, ou de la formulation d'une hypothèse, mais encore des moyens mathématiques précis, pour assurer correctement cette description ou cette formulation.

De même en Physique, il est nécessaire d'introduire des notions de Physique quantique, qui sont utiles aux biologistes, notamment en biologie moléculaire, et qui peuvent parfaitement être exposées de façon quantitative, ainsi que l'a montré P. Mariens (Belgique) dans son intervention. En Chimie, la liaison chimique, la structure moléculaire, le traitement thermodynamique des équilibres chimiques doivent faire l'objet d'une attention spéciale (remarques du Professeur Sahini).

2. Les données utilisables doivent être beaucoup plus solidement étayées. Le résultat brutal, donné comme une recette, est toujours dangereux, car l'utilisation d'un moyen dont on ne sait d'où il sort peut conduire à des catastrophes. Ainsi, sans aller trop loin, on sera nécessairement conduit à présenter non seulement les données immédiatement nécessaires au biologiste, mais encore à lui fournir le substrat lui permettant d'en connaître, au moins approximativement, l'origine, de manière qu'il en saisisse mieux le sens général et puisse en apprécier les limites.

On ne peut, par exemple, se contenter de donner la formule d'un développement en série, sans montrer comment il a été établi et quelles sont les conditions de convergence ; d'énoncer le mode d'emploi, des tests statistiques (ex. L'analyse des variances), sans dégager, ne serait-ce qu'approximativement et "en pointillé", son origine, ce qui, par là même en évitera l'emploi abusif ; d'édicter brutalement les règles de la cinétique chimique sans le support, aussi rigoureux qu'on peut le faire dans un temps raisonnable et pour des non-physiciens, de la thermodynamique.

3. On sera conduit à faire un choix sévère, dans ce que l'on retient et ce que l'on écarte. Nous avons déjà vu de larges domaines dont l'étude ne s'impose pas pour des expérimentateurs, du moins dans le cas général (géométrie descriptive, magnétisme, acoustique, etc..), mais c'est surtout en chimie qu'il faudra être attentif, s'en tenir presque toujours aux phénomènes de principe (structure chimique, liaisons, thermochimie, cinétique des réactions, principales fonctions), et n'envisager qu'exceptionnellement les monographies, pour les seules substances qui intéressent directement les êtres vivants (phosphates, sulfates, acides aminés). Le Professeur Schwab (Münich) a très justement insisté dans son intervention sur le fait que la Chimie cessait d'être enseignée même aux chimistes comme science descriptive ; a fortiori doit-il en être de même pour

les biologistes ?

Les préparations (de laboratoire ou industrielles) de l'hydrogène, du chlore, etc..., les procédés de synthèse des corps organiques, la plupart des propriétés des métaux, les procédés métallurgiques des alliages, doivent être écartés sans hésitation, alors qu'au contraire on insistera sur d'autres chapitres qui n'ont peut-être pas un grand intérêt pour le chimiste pur, mais qui sont fondamentaux pour le biologiste : liaison hydrogène, chélation, physique des solutions, chimie des colloïdes, etc...

En somme, les programmes ne doivent pas être un extrait des programmes de Mathématiques, Physique et Chimie, pour les mathématiciens, physiciens, ou chimistes, mais être spécialement conçus pour les biologistes.

D. Cas spéciaux.

Tout d'abord celui des spécialistes qui utilisent les mathématiques, la physique ou la chimie comme un outil principal : il s'agira par exemple des statisticiens professionnels, des programmeurs de l'agriculture, de certains généticiens, des théoriciens de l'analyse factorielle, ou encore des spécialistes des problèmes de perméabilité cellulaire, de bioélectricité, etc...

Leur formation ne semble pas devoir relever d'un enseignement spécial. Il semble nécessaire, s'ils sont d'origine biologique, qu'ils aient d'abord la formation de base que nous évoquions précédemment, et qu'ils acquièrent eux-mêmes ensuite la spécialisation dont ils ont besoin. De plus en plus, d'ailleurs, de tels spécialistes viennent directement des disciplines annexes et on ne saurait trop indiquer l'intérêt qu'il peut y avoir à la constitution d'équipes de spécialistes travaillant en étroite collaboration : on ne saurait, à partir d'un certain niveau, être universel.

Le cas des professeurs destinés à l'Enseignement secondaire mérite aussi d'être considéré. A première vue, on pourrait penser que, puisqu'ils doivent donner un enseignement relativement élémentaire, leurs besoins se limitent au bagage de base (premier niveau). En fait, cela ne serait pas sans danger. Il n'est pas bon que dans l'Enseignement secondaire, qui doit être un enseignement humaniste, destiné à des élèves du siècle, le Professeur de Sciences naturelles, au moins vis-à-vis de ses grands élèves, ait une attitude d'esprit tournée vers le passé ; or, la biologie de l'avenir, répétons-le, est expérimentale et quantitative.

Même si le contenu du programme reste parfois nécessairement descriptif, raison de plus pour que le professeur s'efforce d'éveiller la curiosité des élèves en leur faisant sentir les mécanismes sous-jacents. Il ne le pourra que si lui-même domine parfaitement la question, s'il a parfaitement compris le substrat physico-chimique de ces mécanismes. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette formation des élèves au niveau secondaire et nous aurons l'occasion de nous demander si la partie de la physique et de la chimie plus immédiatement nécessaire à la compréhension des faits biologiques ne devrait pas être enseignée par le professeur de sciences naturelles, ce qui, à fortiori, exige de lui une formation poussée. Au total, nous inclinerions à conclure que la formation mathématique et physico-chimique du professeur de sciences naturelles des lycées doit s'apparenter plus à celle des biologistes "quantitatifs" (2ème niveau) qu'à celle des "qualitatifs" (qui peuvent se contenter du 1er niveau).

C'est là un souhait dont la réalisation est évidemment subordonnée aux délais dont on dispose pour la formation des maîtres.

Reste le cas des biologistes "appliqués". Si l'on estime nécessaire de faire plusieurs catégories, il faut alors distinguer, du point de vue des connaissances à acquérir, entre ceux qui se destinent à la recherche appliquée, par exemple, les médecins fondamentalistes et les agronomes, et ceux qui, au contraire, n'entendent faire qu'une application pure et simple de ce qu'ils ont appris, les praticiens, comme par exemple les cadres techniques de l'agriculture ou les médecins cliniciens.

Le niveau des connaissances de la première catégorie devrait nécessairement être celui des "quantitatifs", l'autre pourrait se réduire à celui des "qualitatifs". Peut-être même un aménagement dans les méthodes de formation pourrait-il être envisagé par les praticiens qui ne se proposent pas de faire progresser scientifiquement les branches où ils exercent.

C'est un point que nous allons être à même d'examiner dans la deuxième partie de ce rapport, car, outre l'inventaire des besoins, il nous faut ici dégager quelques principes sur la manière de les couvrir dans les divers cas que nous venons d'évoquer.

II. Les procédés de formation.

A. Les procédés pédagogiques.

Ils n'ont, à vrai dire, rien de spécifique, mais ils acquièrent ici une importance particulière du fait que la réticence, marquée par beaucoup d'étudiants à l'égard des Mathématiques et des autres disciplines-supports, provient rarement d'une incapacité à suivre les raisonnements présentés, mais relève tout simplement d'un complexe psychologique.

Il y a, en effet, une marge à l'égard des mathématiques entre l'imagination créatrice, c'est-à-dire l'esprit d'invention, indispensable aux mathématiciens et, à un moindre degré, aux physiciens, et la simple compréhension qui suffit aux naturalistes.

Des soins apportés à la présentation de son enseignement, de la confiance qu'il aura su susciter chez les étudiants biologistes, dépendra pour une large part le succès de celui qui leur enseigne les disciplines latérales.

Les Cours.

L'impératif le plus général et le plus absolu de la pédagogie consiste à ne jamais perdre de vue les particularités du public auquel on s'adresse. Malheureusement, la mise en oeuvre de ce précepte est ici des plus délicates. D'une part, ce public est biologiste, mais, d'autre part, même lorsqu'il n'apprend pas la biologie, il reste scientifique.

Ceci exige d'abord de l'enseignant non-biologiste une grande abnégation. Il est vraiment dur lorsqu'on est chimiste et qu'on aime la chimie, d'enseigner celle-ci en coupant les prolongements qu'on aimerait donner, en suivant un ordre moins satisfaisant, pour le chimiste, que celui auquel le spécialiste est habitué. Et pourtant, tel Professeur de Propédeutique biologique qui, chimiste, se vantait de faire un enseignement à ce point intéressant qu'une partie de son auditoire venait à la Chimie, abandonnant les Sciences naturelles, ce Professeur, au lieu d'être satisfait de lui-même, aurait dû se rendre compte qu'il n'avait pas fait son métier.

A l'inverse, on risque de se laisser entraîner, en sous-estimant le caractère scientifique de l'auditoire biologique, à aller trop loin et à user d'un empirisme de mauvais aloi, à recourir à des images tellement grossières qu'elles en deviennent inexactes, à faire des démonstrations tellement "en pointillé" (une proposition démontrée de temps en temps, entrecoupée de nombreux "or, nous admettons que") que l'enchaînement des idées perd tout intérêt.

Malheureusement, si l'on voit bien le but à atteindre, et les écueils à éviter, il est impossible de dégager des règles générales précises. La pédagogie est un art, et celui qui n'en a pas le don, ni surtout le goût, aura bien du mal à y suppléer par de la bonne volonté.

Cependant, il semble que dans tous les cas le Professeur doit, entre autres, respecter les principes suivants :

1. Il doit capter la confiance de son auditoire. Les étudiants doivent sentir que le physicien, par exemple, qui est devant eux, sait pourquoi il est là et qu'il lui plaît d'être là. Il serait désastreux qu'il leur donnât l'impression que l'enseignement qu'il fait est à ses yeux un enseignement au rabais, une vulgarisation quelque peu dégradante, alors qu'il s'agit, en fait, d'une adaptation dans le sens de l'utilisation, adaptation que l'on doit éprouver un certain plaisir à faire, quelque mal qu'elle donne.

2. Il doit bien se pénétrer du but de son enseignement, c'est-à-dire de ce que les étudiants doivent en retirer, non pas seulement dans l'immédiat et tel que cet enseignement est donné, mais aussi dans ce qu'ils auront à en faire plus tard.

Cette attention qu'il faut porter à l'utilisation future des données enseignées, peut influer considérablement non seulement sur le choix des données, elles-mêmes, et la manière de les enseigner, mais parfois même sur toute l'ordonnance du cours.

Par exemple, l'enseignement de la statistique ne sera pas forcément conduit de la même façon s'il est destiné à des praticiens ou à des médecins qui auront à utiliser les règles issues de cette discipline dans un cadre parfaitement défini, qu'ils ne rechercheront pas à modifier ou si, au contraire, il s'agit de biologistes expérimentateurs qui pourront avoir envie de recourir un jour à des procédés plus puissants et pour lesquels l'enseignement doit être conduit de telle sorte qu'il puisse être prolongé sans difficulté.

Dans le premier cas, on peut parfaitement introduire d'entrée la Statistique comme la science du dépouillement des données, commencer par les distributions réelles, définissant leurs paramètres et demandant à l'expérience (ou admettant sans démonstration) la forme des distributions théoriques les plus usuelles, pour déboucher presque immédiatement sur les tests. On y gagnera en concret et les étudiants seront beaucoup plus rapidement à même d'utiliser ces règles dont ils ont besoin.

Dans le deuxième cas, au contraire, il sera préférable de commencer par le calcul des probabilités, de voir sa répercussion sur les lois qui régissent les variables aléatoires, de passer alors aux distributions théoriques, et enfin seulement aux applications pratiques, qui auront alors

tout le substrat fondamental nécessaire.

3. La notion enseignée (qu'il s'agisse d'un fait ou d'un enchaînement de faits) ayant été arrêtée en fonction de ce qui précède, il faut y arriver le plus rapidement possible. Si elle ne peut être établie, sans de longs préalables, par une courte démonstration (j'entends ne prenant qu'une fraction de leçons, alors qu'on procède à cet établissement. Sinon, sans l'admettre "ex abrupto", ce qui est toujours gênant pour l'esprit), qu'on l'introduise simplement par des approximations utiles, des modèles simplifiés, des exemples convenables.

4. Tous les congressistes ont été unanimes à souhaiter un enseignement concret et dans la mesure du possible comportant une réplique biologique de la notion enseignée. En Mathématiques, par exemple, il est souvent très facile de trouver de telles répliques. Pour enseigner la fonction exponentielle, on peut faire appel à la croissance d'une colonie bactérienne, à l'influence de la température sur la respiration (à partir de données expérimentales réelles) ou sur l'influence des apports d'engrais sur la récolte (loi de Mitscherlich). Le Docteur M.R. Foord a souligné dans son intervention combien la génétique et l' écologie étaient riches de tels exemples.

Comme le signale très clairement une motion adressée au rapporteur (de la Commission des Biologistes de la Faculté des Sciences de Lyon) "il n'est nullement indifférent d'enseigner le principe des équations différentielles avec un exemple ou un autre : les élèves sont incomparablement plus réceptifs lorsque la théorie mathématique leur est apportée comme la formulation d'un problème biologique, que si elle leur est présentée comme une exigence abstraite, dont la nécessité ne leur apparaît nullement évidente".

Cette nécessité ne correspond d'ailleurs pas seulement à un intérêt pédagogique, mais aussi, dans le cas des Mathématiques, à un impératif d'ordre logique, très bien mis en évidence par l'intervention du Professeur Pisot de Paris :

"Il y a un certain nombre de problèmes de biologie qui peuvent être décrits par un modèle mathématique ; c'est en cela qu'interviennent les mathématiques en toute science. Il est probable qu'un tel modèle est toujours tellement simple qu'il ne tient pas compte de toute la complexité du phénomène, donc le modèle mathématique n'est pas encore une explication, mais il prépare l'étudiant à se rendre compte qu'une explication de cette nature peut être recherchée lorsque la science sera assez avancée.

Il me semble donc qu'il faut choisir un enseignant mathématique donnant à la fois des idées fondamentales des mathématiques et les phénomènes biologiques dont ces idées donnent le modèle pour une partie de leur comportement."

Il va de soi qu'il faut se garder de faire appel à des exemples qui ne sont que formellement biologiques, car il ne suffit pas d'introduire l'expression "être vivant" dans un exemple pour qu'il prenne une résonance biologique.

Parfois l'exemple biologique fait défaut, mais il reste alors l'appel à des exemples physiques ou chimiques, car on n'oubliera pas que l'un des buts des Mathématiques est aussi de rendre intelligible les enseignements de physique et de chimie.

Tout ce qui précède vaut aussi pour la physique et la chimie, mais ici le caractère concret est plus évident et le risque de décourager les élèves biologistes par une abstraction dont ils ne voient pas la portée est resté plus réduit. Cependant, toutes les fois qu'on le pourra, on cherchera aussi la réplique biologique de notions physiques ou chimiques. Par exemple, pour la notion de potentiel thermodynamique, on peut en montrer l'application aux phénomènes d'absorption des substances minérales (équilibre de Donnan). Tout le chapitre des équilibres chimiques peut être traité à l'aide d'exemples biochimiques dont on dispose surabondamment.

Si dans les cours on n'a pas toujours le temps d'établir cette réplique biologique, qui peut entraîner parfois d'assez longues digressions, il faut le faire dans les exercices pratiques qui sont les auxiliaires indispensables du cours.

5. Il ne faut pas hésiter, compte tenu des impératifs précédents, à rompre avec certaines habitudes dénoncées avec vigueur par plusieurs Congressistes : Professeurs Schwab (Allemagne), Sette (Italie), Sahini (Roumanie), touchant les cloisonnements entre les enseignements. S'il est commode pour l'établissement d'un programme de classer les divers chapitres sous des rubriques différentes : Mathématiques, Physique, Chimie, et si cette distinction est opportune pour la formation des spécialistes en ces disciplines, par contre, s'agissant d'un enseignement de "Sciences-supports" cela risque d'entraîner, pour maintes questions, des clivages artificiels ou des répétitions : les vecteurs glissants étudiés par le mathématicien et le physicien, la thermodynamique, ou encore la structure moléculaire, envisagées avec seulement des nuances, à la fois par le physicien et le chimiste, etc...

Une entente entre les enseignants doit donc se faire pour adopter, selon les circonstances, la meilleure solution en vue de ce but, qu'on ne saurait trop répéter : fournir aux biologistes les moyens nécessaires pour étudier la Biologie.

Les travaux pratiques.

On ne saurait trop insister sur leur importance. L'étudiant concrétisera, grâce à eux, les notions théoriques qu'il aura reçues au cours et il saisira mieux leurs significations. Il se rendra plus facilement compte de ce qui aura pu lui échapper et de ce qu'il aura cru comprendre ; il saura alors demander les renseignements nécessaires ou chercher lui-même les compléments dans les livres. L'assimilation des connaissances en sera grandement facilitée.

Il ne faudra pourtant pas oublier que ces exercices perdraient une grande partie de leur valeur si les impératifs suivants n'étaient pas respectés :

a) Il ne faut pas vouloir tout faire aux travaux pratiques : ils ont leurs limites, imposées par le matériel et le temps dont disposent les étudiants. Si, dans quelques cas, ils peuvent suffire à faire le tour de la question (ex : courant continu, chimie analytique), la plupart du temps ils doivent s'appuyer sur un substrat théorique.

b) Cours et travaux pratiques doivent être coordonnés. Il est lamentable de voir dans certaines Facultés le Professeur cantonné dans le cours magistral et ne se souciant pas de sa répercussion sur les travaux pratiques et, réciproquement, des Chefs de travaux pratiques suivant un ordre, certes logique, mais parfaitement indépendant de celui du cours. Il faut absolument un aménagement réciproque de l'ordonnance des cours et des programmes des travaux pratiques.

La coutume, pratiquée dans certaines Facultés, d'une unique série de travaux pratiques correspondant à des enseignements parallèles (mais ordonnés différemment) s'impose peut-être quand on ne peut pas faire autrement, mais elle doit, dans toute la limite du possible, être évitée.

c) Les effectifs doivent être peu nombreux. Un Assistant ne peut raisonnablement s'occuper de plus d'une quinzaine d'étudiants, s'il veut les mettre en confiance et les aider à lui soumettre les difficultés qu'ils rencontrent. L'Assistant, en effet, ne doit pas se contenter de "surveiller" la salle, mais prendre une part active à l'enseignement.

d) Les manipulations doivent pouvoir aboutir au résultat promis, sauf accident imprévisible : il n'est rien de plus décourageant pour les étudiants que ces manipulations qui, sauf miracle, ne marchent jamais.

Le matériel doit être adapté aux besoins pédagogiques, mais doit aussi être moderne. Il faut renoncer -sauf intérêt pédagogique exceptionnel - à des procédés périmés que personne n'utilise plus dans les laboratoires (ex : fabrication de l'oxygène à partir de l'oxylithe).

Cela ne signifie pas, bien au contraire, que l'on doive réduire les travaux pratiques à la contemplation d'appareils automatiques, où il n'y a que quelques boutons à tourner pour obtenir les résultats : aux travaux pratiques, l'étudiant doit éduquer autant ses mains que son esprit. Le soufflage du verre, le montage d'appareils de physique et de chimie, les dosages chimiques, les analyses chromatographiques, etc... seront l'occasion pour l'étudiant de s'exercer manuellement au travail du laboratoire, qu'il s'agisse d'opération banale ou délicate, de technique moderne ou déjà depuis longtemps classique.

Enfin, le rôle formateur des travaux pratiques quant à la méthodologie scientifique ne devra pas être négligé.

En définitive, les travaux pratiques devront avoir trois objectifs, que l'on ne doit pas perdre de vue lors de la composition de leurs programmes :

1. Faciliter l'assimilation du cours magistral en l'illustrant et en le complétant ;
2. Faire acquérir à l'étudiant une certaine habileté manuelle et lui mettre en main les techniques générales dont il aura besoin ;
3. L'initier à la méthodologie expérimentale en lui apprenant à mettre sur pied une expérience et en faire la critique, en lui faisant prendre contact avec les techniques modernes.

Exercices.

Les exercices, surtout en Mathématiques, mais aussi en Physique et en Chimie, préparés par les élèves et corrigés par petits groupes, ont une importance considérable, car seuls ils permettent aux étudiants d'acquérir les mécanismes qui leur feront utiliser ensuite d'eux-mêmes les moyens qu'ils auront pratiqués.

Mais, dans toute la mesure du possible, les exercices devront se référer à des exemples concrets, plus précisément biologiques, et même réellement biologiques devrions-nous dire, car il ne s'agit pas simplement d'introduire formellement le mot "être vivant" pour que l'exercice ait réellement une résonance biologique.

Si l'on veut faire étudier la fonction exponentielle par exemple, il est indiqué de faire faire des exercices sur la croissance des colonies bactériennes, sur l'influence de la température sur la respiration (à partir de données expérimentales réelles), ou sur l'influence des apports d'engrais sur la récolte (loi de Mitscherlich).

Sauf pour faire acquérir plus vite certains mécanismes (comme l'intégration par parties), il faut éviter de faire faire des exercices comme un simple jeu mathématique. Ici encore il s'agit d'étudiants biologistes et non pas de mathématiciens (ou de physiciens, ou de chimistes) : s'il est bon de faire faire des gammes à un pianiste, qui les fera même si elles ne lui plaisent guère, il serait déraisonnable d'en faire faire à une dactylographe sous prétexte de lui assouplir les doigts.

Activités dirigées.

Les "activités dirigées" constituent une innovation de l'enseignement français dont il convient de souligner l'intérêt. Il s'agit d'activités diverses, pratiquées par les étudiants (répartis en petits groupes) et préparées soit par l'ensemble du groupe, soit individuellement à tour de rôle. Ces activités étant suivies par un Assistant chevronné (Maître-Assistant). De telles activités ont pour but de faciliter l'assimilation des connaissances, mais aussi de les compléter, d'en faire sentir l'intérêt, et de stimuler le goût de l'étudiant pour elles.

Les étudiants ont à faire preuve d'une grande initiative et les commentaires de leurs travaux (qui peuvent être de documentation ou de simple réflexion) sont faits librement et sans ordonnance formelle trop rigide, ce qui permet de réviser ou d'apprendre bien des questions d'une manière attrayante et efficace.

Par exemple en Physique, on verrait très bien des étudiants préparant un exposé sur la "modulation de fréquence", ce qui permettrait de reprendre, sans révision fastidieuse, l'ensemble de l'étude des mouvements vibratoires ; ou encore sur l'"appareil photographique".

En Mathématiques, on pourrait essayer d'analyser les données statistiques locales sur les maladies ou les récoltes, cherchant à en tirer des enseignements sur l'évolution future de l'état sanitaire ou agricole du pays.

En Chimie, on pourrait étudier les modalités de l'équilibre carbonate-bicarbonate dans le sol, en fonction des divers facteurs qui peuvent intéresser l'agronomie, etc...

Bien conduites, dans un climat détendu, de telles activités peuvent avoir des conséquences heureuses insoupçonnables, non seulement sur

l'assimilation des connaissances, mais aussi sur l'attitude psychologique des étudiants et sur la formation de leur esprit.

B. Quels seront les enseignants ?

La solution idéale est évidente, après toutes les considérations que nous avons été amenés à faire sur le compte des cours et sur la manière de les dispenser. Pour bien enseigner une discipline-support aux biologistes, il faut être à la fois spécialiste de cette discipline et biologiste. Ne croyons pas que cette solution n'intervienne jamais. Au contraire, le développement de la science moderne va dans le sens d'un remaniement des divisions traditionnelles et de l'épanouissement des disciplines mixtes, comme la biophysique, p. ex., dont le Professeur Sette (Italie) a souligné l'intérêt comme source d'enseignement de la physique aux biologistes. De même, la mathématique biologique, la statistique, l'enzymologie, à cheval sur la chimie et la biologie, peuvent fournir pour les deux autres secteurs, des enseignants parfaitement adaptés.

Mais il faut bien reconnaître que c'est là un cas limite qui est encore loin d'être général. Lorsque dans une Faculté on ne dispose pas de ces spécialistes "hybrides", que faire ?

Ici les points de vue exprimés - dont le rapporteur doit se faire l'écho, diffèrent. Il est vraisemblable d'ailleurs que tous sont justifiés et que le choix entre eux n'est que cas d'espèce.

I. Certains (L. Chamard) préconisent la formule la plus simple : les Mathématiques sont enseignées par les mathématiciens, et ainsi de suite. Toute arrière-pensée de compétition pour les postes d'enseignement étant écartée de leur esprit, leur argumentation est des plus solides. Déjà, disent-ils, la nature de l'enseignement exige des approximations et des à-peu-près. Que serait-ce si les spécialistes n'en gardaient plus le contrôle ? On arriverait vite à une détérioration qui serait très grave.

De plus, si le physicien enseigne mal la Physique au biologiste, parce qu'il connaît mal la Biologie, c'est une faute pédagogique ; mais si le biologiste enseigne mal la Physique, et que ce soit parce qu'il connaît mal la Physique (car on ne voit pas pourquoi il serait plus universel que son collègue physicien), c'est une faute scientifique. Or, c'est tout de même grave.

Aux biologistes de tenir la main à ce que les impératifs précédents soient respectés : à ce que le physicien, par exemple, n'oublie pas la

nature de son auditoire et sache s'adapter à ses besoins, prenant tous les contacts nécessaires avec ses collègues biologistes pour les déterminer.

II. A quoi d'autres répliquent que, précisément par suite de l'importance et de la complexité des impératifs précédents, il n'y a que les utilisateurs qui soient à même de les connaître dans chaque cas particulier.

Par conséquent, à chaque fois que l'on disposera dans une Faculté d'un biologiste compétent dans une discipline-support, (sans être pour autant spécialiste dans cette discipline) c'est à lui, selon cette deuxième doctrine, qu'il conviendra de confier l'enseignement de cette discipline.

Par "compétent", en Physique, par exemple, il ne s'agit pas seulement de désigner quelqu'un qui a simplement été amené à fréquenter tel ou tel chapitre, mais qui a régulièrement suivi, au cours de ses études, la formation de base des physiciens (1er niveau des Facultés), seule la formation approfondie lui faisant défaut pour être spécialiste ; et qui, de plus, a fait par la suite l'effort de se tenir constamment au courant et d'adapter ses connaissances aux progrès de la Physique.

III. D'autres, enfin, essayant de concilier les points de vue et d'apporter des solutions moins extrêmes.

a) On peut souvent opérer des "glissements" entre les disciplines. Par exemple, dans le cas où il n'existe pas de mathématiciens s'intéressant à ce type d'enseignement, on pourra redistribuer les sciences supports, entre un physicien, un chimiste et un biologiste (sous les réserves déjà données de compétence et de goût), de telle sorte que chaque utilisateur enseigne la discipline voisine qui le commande plus directement :

- le biologiste enseignerait, en plus évidemment de la Biologie, d'une part la Chimie organique et d'autre part la Statistique ;

- le chimiste enseignerait le reste de la Chimie et la partie de la Physique qui l'intéresse : thermodynamique, états de la matière, Physique atomique, Physique des solutions ;

- le physicien : la Mécanique, l'Optique et l'Electricité, et aussi la partie "Analyse" et "Calculs vectoriels" des cours de Mathématiques.

Une telle solution est séduisante, car elle facilite la coordination et aide à la mise en confiance des étudiants, mais les enseignements seraient peut-être un peu moins rigoureux que dans la solution I.

En tout cas, si le glissement est concevable, ce ne peut être que dans le sens qui va vers la Biologie. Par exemple, l'enzymologie doit être enseignée, cela va de soi, par un biochimiste s'il y en a un dans la Faculté considérée. Mais s'il n'y en a pas ? On a le choix entre un chimiste et un physiologiste (qui a à connaître de la nutrition et du métabolisme). Dans ce cas, il semble bien qu'il y ait lieu de répondre en faveur du physiologiste. Car même si ses fondements théoriques sont moins bons que ceux de son collègue chimiste, ils ne seront tout de même pas "facteurs limitants". Or, il saura incomparablement mieux, en général, ce qu'est la Chimie des êtres vivants que ne pourrait le savoir le chimiste, même si celui-ci est un organicien.

b) Une intéressante formule consiste à avoir un enseignement en deux étapes :

1. Le spécialiste enseigne les parties plus délicates du programme de sa discipline aux cadres biologistes, qui ont déjà une certaine culture dans cette discipline. Cet enseignement peut être dispensé rapidement, s'adressant à un auditoire déjà averti.

2. Les biologistes ayant suivi cet enseignement, sont alors aptes à le transposer, en y mettant le temps et les formes nécessaires, au niveau de leurs propres étudiants.

Le principe d'un tel enseignement n'est peut-être pas à généraliser - car il risque d'être un peu lourd - mais il mérite d'être retenu dans bien des cas où il rendrait de grands services.

Supposons, par exemple, qu'il y ait à l'échelle inter-Facultés - y compris au niveau international - des sortes de "cours d'enseignement" destinés aux biologistes déjà chevronnés, et même aux Professeurs de Biologie, et faits pendant quelques jours, par des mathématiciens sur des aspects nouveaux et autrefois peu classiques des Mathématiques : calcul vectoriel, information, calcul matriciel. Le public peu nombreux, déjà familier de l'enseignement supérieur, serait beaucoup plus apte à saisir la pensée du mathématicien sans exiger de celui-ci une adaptation excessive. Et, rentrés dans leur Faculté ou leur chaire d'origine, ces biologistes seraient vraisemblablement capables de faire un enseignement accessible pour leurs étudiants et reposant sur des bases sérieuses. Une intéressante tentative de ce genre a été faite à la Faculté des Sciences de Paris par Ch. Pisot (qui assistait au Colloque de Dakar) d'un enseignement de mathématiques modernes aux enseignants et chercheurs biologistes : elle a obtenu un grand succès.

On ne saurait trop insister sur le fait que le choix entre ces diverses solutions est un cas d'espèce, qui dépend de l'organisation générale

de l'enseignement dans une Faculté, de la disponibilité des enseignants dans les diverses disciplines, et aussi du niveau de l'enseignement.

Sur ce dernier point, par exemple, les avantages de la solution I (enseignement par spécialistes) et les défauts de la solution II (enseignement par les biologistes) sont beaucoup plus importants pour les cours déjà spécialisés du 2ème niveau, et, à l'inverse, ce sont les avantages de la solution II et les défauts de la solution I qui deviennent primordiaux pour le programme de base plus général du 1er niveau : la même solution n'a pas forcément à intervenir dans ces deux niveaux.

C. Le déroulement des divers enseignements.

- le premier niveau.

C'est le cas le plus simple. Il semble que le programme nécessaire puisse être inculqué en une seule année, pourvu que la partie biologique reste assez limitée et bornée aux bases les plus élémentaires. L'enseignement des Mathématiques, de la Physique et de la Chimie devrait bien absorber les trois quarts de l'horaire, en tous cas ne peut être inférieur aux deux cinquièmes.

Nous insistons nettement sur ce dernier point. Il peut paraître déraisonnable de faire consacrer à un étudiant la majeure partie de son temps hors de sa spécialité. Pourtant, on ne doit pas oublier que le bagage mathématique, physique et chimique est indispensable et qu'il ne sera plus jamais augmenté par la suite ; alors que l'étudiant aura maintes occasions de se compléter en biologie.

En outre, si nous voulons enrayer les "vocations négatives", il n'est pas mauvais de mettre un fort bagage de sciences à tendance mathématique, qui serviront de repoussoir à de telles vocations.

- le deuxième niveau.

Ici, la question peut se poser de savoir si le programme tel que nous l'avons défini, peut être assimilé (car il peut toujours être dispensé et même appris par le jeu de la mémoire immédiate, qui oublie aussi vite qu'elle a enregistré) en quelques mois.

Comme il faut tout de même bien que le biologiste fasse de la Biologie, car il n'est ni bon ni légitime de mettre une vocation trop longtemps en veilleuse, si ce n'est pas obligatoire, la réponse semble devoir être négative.

De plus, une grande partie des notions enseignées ne prennent leurs sens que si l'étudiant est un peu plus "mûr" et en voit déjà la nécessité.

Dès lors, on peut imaginer qu'il y aurait deux années : l'une qui serait commune à tous les Biologistes, et l'autre qui correspondrait aux compléments.

On peut aussi penser à d'autres systèmes : dans certaines Facultés (des Etats-Unis notamment) il existe le système suivant :

- un enseignement court pour les biologistes des disciplines "descriptives" ;
- un enseignement long, distinct, pour les autres, et comprenant deux années ; la première où l'on ne fait que des Mathématiques et de la Physique, la seconde pour étudier la Chimie et la Biologie.

Cela est très rationnel, mais exige évidemment que les vocations soient bien ancrées.

De plus, il n'est peut-être pas bon de prévoir deux enseignements différents la première année pour les uns et pour les autres. Nous avons déjà souligné combien il y aurait d'intérêt à ce qu'un grand nombre des biologistes s'occupant actuellement des disciplines "descriptives" puissent suivre le développement naturel de la Biologie dans le sens quantitatif. Le passage sera évidemment facilité si les deux enseignements s'enchaînent.

Il reste que là encore le Congrès ne peut émettre que des "tendances", et que rien n'interdit, si l'esprit des remarques précédentes est respecté, que l'enseignement long (premier plus deuxième niveaux) soit dispensé à tous, et en une seule année : mais c'est une solution rapide, qui exige, outre un personnel d'encadrement nombreux, que les étudiants entrant en Faculté aient déjà une solide formation de base.

- <u>troisième niveau et cas particuliers.</u>

1) Le cas du troisième niveau, ou niveau approfondi, s'adressant aux étudiants ou chercheurs déjà chevronnés, sortait du cadre de ce Colloque. Il ne faut pourtant pas oublier que tout ce que nous avons dit s'adresse à l'ensemble des étudiants biologistes ; mais, pour certains d'entre eux, qui ont à utiliser plus particulièrement telle ou telle branche des Mathématiques, de la Physique ou de la Chimie (généticiens, statisticiens, biophysiciens, biochimistes, etc..), il conviendra de prévoir des enseignements hautement spécialisés, dispensé par des spécialistes, en étroite collaboration avec les biologistes qui ont la responsabilité de l'enseignement au niveau approfondi ou des travaux de recherches.

2) Dans le même esprit unitaire, il serait souhaitable que l'enseignement de base pour biologistes soit commun aux géologues et même

aux géographes qui ont, à plusieurs reprises (Inspecteur Général Clozier), souligné combien le problème des "disciplines-supports" se posait pour eux d'une manière aussi aiguë qu'en Biologie. Quelques nuances pourraient être introduites entre ces deux enseignements, soit dans des exemples concrets adoptés, soit même dans le contenu de l'enseignement du deuxième niveau.

3) Les Professeurs de l'enseignement secondaire, nous l'avons déjà dit, ont tout intérêt à suivre l'ensemble des deux niveaux. Le premier leur est absolument indispensable. Quant au second, s'ils n'ont pas le loisir d'en suivre les cours, pouvant être obligés de hâter leur formation professionnelle, qu'au moins ils en acquièrent individuellement les connaissances.

4) Le recyclage des biologistes déjà chevronnés, en particulier les enseignants, est un impératif absolu : les Mathématiques, la Physique et la Chimie évoluent trop vite pour que les connaissances acquises au cours de la scolarité ne risquent pas d'être rapidement dépassées. Conçu dans l'esprit de l'enseignement "en deux étapes" évoqué plus haut (solution IIIb, page 132), ce recyclage ne demanderait pas beaucoup de temps, ni aux spécialistes qui le donneraient, ni aux biologistes qui le suivraient: ces derniers en particulier en gagneraient beaucoup par rapport à une mise à jour livresque individuelle.

L'ensemble ainsi présenté forme au total un tout, cohérent et simple, permettant aisément les passerelles latérales et longitudinales. Appuyé sur les solides structures de travaux pratiques, d'exercices et d'activités dirigées, le système devrait pouvoir donner satisfaction.

III - Le problème au niveau du deuxième degré.

Le Rapporteur sera très bref sur cet aspect du problème. Il est en effet apparu dans les réponses de la plupart de ses correspondants que d'une part, le problème de formation ainsi posé ne l'était pas pour les seuls biologistes, mais qu'il relevait davantage de la question beaucoup plus générale de l'humanisme scientifique, et d'autre part, que la résolution de ce problème, par exemple pour l'enseignement des Mathématiques n'était peut-être pas encore en vue.

Le seul point qu'il convient de dégager est celui-ci : l'enseignement secondaire, qui est un enseignement humaniste, doit être à l'heure du monde actuel. En Biologie une véritable révolution s'est produite dans le domaine de la Biologie moléculaire ; une révolution, déjà plus ancienne, le fut il y a quelques années dans celui du Métabolisme. Il est inconcevable que, pour des difficultés d'ordre pédagogique qui peuvent être surmontées, la jeunesse des lycées soit tenue en dehors de cette évolution, ou plus exactement soit contrainte de rechercher à l'extérieur ce que l'enseignement officiel ne peut pas lui apporter. La jeunesse juge très sévèrement et avec beaucoup de raison, l'enseignement d'un autre âge qui lui est fait.

Dans cette situation, il y a certes une part de routine et de méfiance, à l'égard des jeunes générations, dont les plus anciennes ont tendance à sous-estimer les aptitudes. Mais il y a aussi cet argument de poids : les enfants manquent de substrat physico-chimique (et donc mathématique) nécessaire à la compréhension de la Biologie moderne.

Ici la réponse doit être catégorique. A la condition de rester dans des limites raisonnables, l'élève des lycées, au moins dans la classe terminale ne peut pas ignorer la Biologie moderne.

Il doit savoir, non pas vaguement, mais avec déjà quelques précisions, que la respiration n'est pas une combustion lente (il y a tout de même eu du nouveau depuis Lavoisier) il doit savoir ce que sont, en gros, les acides nucléiques et quels sont leurs rôles dans le fonctionnement cellulaire, dans la synthèse des protéines et dans "l'information" donnée à la cellule.

C'est un impératif absolu qui exige donc que :

1) Le programme de Physique, et surtout de Chimie, soit ordonné de telle sorte - ce qui en définitive ne demande pas de grandes modifications - qu'il comporte les notions de base, celles de Chimie générale et de Chimie organique générale (les principales fonctions) dans la classe préterminale au plus tard ;

2) Que sur ces bases, indépendamment de l'enseignement de Physique et de Chimie qui sera donné en tant que tel par les Professeurs de Physique et de Chimie, le Professeur de Biologie puisse asseoir, en deux ou trois leçons, les éléments indispensables à la poursuite de son cours en Biologie.

Les ouvrages de vulgarisation, les périodiques, la radio, plongent -souvent bien mal- l'enfant dans la vie de tous les jours. Il est essentiel que les enseignants surmontent les difficultés pédagogiques que soulèvent une telle "vulgarisation", dès lors qu'on veut la faire correctement et scientifiquement.

IV - Exemples de programmes.

Les programmes suivants ne sont donnés qu'à titre indicatif. Ils peuvent, selon les circonstances locales, être sensiblement allégés, constituant une limite à atteindre dans les cas favorables.

Deux niveaux ont été distingués : le premier correspond aux connaissances indispensables à tout biologiste ; une large partie a dû en être acquise dans l'enseignement secondaire. Le deuxième ne sera pas forcément donné à tous et peut être réservé à ceux qui se destinent aux branches faisant un plus grand usage des sciences-supports (physiologistes, écologistes, etc..). Il s'agit encore d'un niveau assez élémentaire, qui ne doit pas être confondu avec le troisième niveau destiné à certains spécialistes (généticiens, biochimistes, etc..) et dont le contenu, très variable selon les cas, n'a pas à être envisagé ici.

Normalement les deux niveaux sont à dispenser en deux ans, mais un enseignement plus accéléré peut être envisagé pour les cas plus favorables.

Enfin la répartition entre les trois disciplines-supports a été réalisée dans un souci d'équilibre et d'unité, mais d'autres répartitions peuvent être envisagées.

A - Mathématiques.

Niveau I

Notions générales.

. Relations d'ordre et d'équivalence
. Notion d'applications, fonctions ; graphes
. Groupes, groupe homographique

Calcul vectoriel

. Vecteurs libres. Produit scalaire ; produit vectoriel.

Analyse

. Limite. Dérivée. Formule de Taylor. Développements limités.
. Intégrales définies ; somme de Riemann ; valeur moyenne d'une fonction ; relation avec la dérivée. Intégration par parties. Calcul de quelques intégrales simples, d'aires et volumes.
. Fonctions logarithmique, exponentielle. Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

Probabilités et statistique.

. Notion de variable aléatoire finie et continue. Fonction de distribution ; densité ; valeur moyenne, écart-type, variance. Variables indépendantes.
. Loi des grands nombres.
. Distributions expérimentales. Loi limites : distribution binomiale de Poisson, de Laplace - Gauss.
. Echantillonnages. Ajustement à une distribution théorique. Test χ^2 de K. Pearson.
. Sécurité d'une moyenne et comparaison de deux moyennes. Test t de Student-Fischer.
. Notion d'information.

Niveau II

Analyse.

. Nombres complexes
. Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles. Champs de vecteurs. Gradients. Différentielles.
. Intégrales multiples. Moments d'inertie.
. Séries. Séries de Fourier.
. Equations différentielles ; variables séparées ; équations linéaires du premier ordre.

Notions sur les espaces vectoriels.

. Applications linéaires. Matrices. Déterminants. Equations linéaires. Valeurs propres. Diagonalisation des matrices (analyse factorielle).

Statistique.

. Vecteurs aléatoires.
. Régressions linéaires. Coefficient de corrélation
. Utilisation des tests dans le cas des pourcentages (= proportions).
. Comparaison des variances. Analyse de la variance (test F de Fisher-Snedecor).

Notions sur le traitement de l'information et la cybernétique.

(Sur des exemples biologiques uniquement).

N.B. Les questions relatives aux vecteurs glissants ont été incluses dans le programme de Physique.

B - Physique.

Niveau 1

Mesure des grandeurs.

. Unité M.K.S.A. Erreurs et approximations dans les mesures et les calculs.

Mécanique.

. Forces. Equilibre. Pression.
. Travail. Puissance.
. Principe fondamental de la dynamique.
. Quantité de mouvement (translations et rotations).
. Energie potentielle et énergie cinétique.
. Mouvements vibratoires.

Chaleur, Thermodynamique.

. Notion élémentaire de thermométrie. Modes de transmission de la chaleur.
. Principes de la Thermodynamique (énoncés élémentaires ; conservation et dégradation de l'énergie).

Electricité.

. Charges électriques. Loi de Coulomb. Champ potentiel électrique.
. Résistance, loi d'Ohm.
. Courant alternatif sinusoïdal : définition, fréquence, intensité efficace.

Optique.

. Optique géométrique ; loupe, microscope.
. Ondes électromagnétiques ; étendue de leur domaine.
. Polarisation de la lumière, polarisation rotatoire.

. Grandeurs photométriques, énergétiques et visuelles.
. Spectres d'absorption. Spectrophotomètres.

Physique atomique.

. Structure de l'atome : noyaux, isotopes. Nombre atomique. Nombre de masse.
. Equivalence entre matière et énergie.
. Radio-éléments naturels et artificiels. Période radioactive. Equilibre radio-actif, Curie. Détection des particules ionisantes par compteur, scintillation, émulsion photographique.

Niveau II

Thermodynamique.

. Transformations réversibles et irréversibles.
. Différents énoncés (et passage de l'un à l'autre) de deux principes de la Thermodynamique.
. Energie utilisable. Potentiel thermodynamique. Energie libre. Entropie.
. Enthalpie, traitement thermodynamique.

Electricité.

. Mécanismes du passage du courant dans les conducteurs métalliques et électrolytiques.
. Notion sur le passage du courant dans le vide et dans les gaz.
. Champ magnétique créé par les courants. Action des champs électriques et magnétiques sur un corpuscule électrisé en mouvement. Microscope électronique. Oscillographie.
. Phénomènes d'induction électromagnétique.
. Effets thermoélectriques (Notions). Thermocouples.

Physique atomique.

. Réactions nucléaires. Neutrons. La fission nucléaire.
. Unité de dose de rayonnement : roentgen.
. Notions de physique quantique

Optique.

. Diffraction.
. Effet photoélectrique. Le photon.

N.B. Les questions relatives aux états de la matière ont été incluses dans le programme de Chimie.

C - Chimie.

Niveau 1

Chimie générale.

. Structure de la matière ; éléments, corps simples, corps composés.
. Notions sur la structure moléculaire et les réactions chimiques.

Etats de la matière.

. Etat gazeux : équation d'état des gaz parfaits. Pression partielle.

. Changements d'état. Fusion et solidification, surfusion, verre. Vaporisation et liquéfaction. Sublimation, lyophilisation.

. Solutions liquides étendues. Electrolytes.

. Pression osmotique, cryoscopie.

. Colloïdes, stabilité, floculation, adsorption.

. Equilibres chimiques. Enoncés et applications des lois qualitatives et quantitatives.

. Dissociation électrolytique. Equilibre ionique.

. pH d'une solution. Indicateurs colorés. Solutions tampons. Hydrolyse. Oxydo-réduction.

Chimie générale.

On se limitera exclusivement aux propriétés générales des éléments et de leurs composés qui interviennent directement dans le fonctionnement des êtres vivants : oxygène, hydrogène, eau, chlorures, nitrates, phosphates, sulfates, K, Na, Ca, Mg, etc.

Chimie organique.

. Carbures.

. Fonction alcool. Fonction phénol.

. Fonction amine.

. Aldéhydes et cétones.

. Fonction acide. Fonction ester, chlorure et anhydride d'acide.

. Fonction amide.

. Urée.

Chimie analytique.

. Analyse minérale qualitative (seulement sur les éléments intéressant les êtres vivants). Exemple de gravimétrie et de titrimétrie. Chromatographie.

Niveau 11

Compléments sur les états de la matière.

. Théorie cinétique des gaz.

. Etat liquide. Force intermoléculaire. Tension superficielle.

. Ecoulement. Viscosité.

. Etat cristallin.

. Solutions solides, eutectiques.

Chimie générale.

. La liaison chimique. Nature des liaisons. Covalence, interaction ionique. Coordination. Forces de Van der Waals.

. La liaison hydrogène. La chélation métallique.

. Relations entre structure moléculaire et propriétés chimiques (spécialement celles intéressant les biochimistes).

. Traitement thermodynamique des équilibres chimiques.
. Vitesse de réaction. Ordre et molécularité.
. Exemple de cinétique chimique simple.
. Catalyse : caractères fondamentaux.
. Potentiel d'oxydo-réduction : traitement thermodynamique et applications.

Chimie organique.

. Fonctions mixtes aminés, acides cétoniques, acides alcools, etc.
. Glucides. Protides. Lipides. Propriétés générales (les monographies nécessaires, les processus métaboliques de biosynthèse et de dégradation seront traités dans les secteurs de la Biologie où ils interviennent : enzymologie, microbiologie, physiologie, etc).
. Hétérosides (même remarque)
. Hétérocycles (id.)

Chimie analytique.

En plus des méthodes déjà vues dans le programme de base (Niveau I) on ajoutera des exemples d'utilisation des méthodes modernes d'analyses : optique, électronique, radiographie, chromatographique et radiochimique.

N.B. Les questions relatives à la structure de l'atome et aux principes de la thermodynamique ont été incluses dans le programme de physique.

V - Résumé général et conclusions.

A. L'inventaire des besoins.

L'élaboration d'un programme de Mathématiques, Physique et Chimie, en tant que "sciences-supports" de la Biologie, doit tenir compte de deux séries de faits. D'une part, la Biologie recouvre un large éventail de disciplines, où les tendances d'esprit les plus diverses (vers l'observation ou l'expérimentation, vers le concret ou le théorique, vers le qualitatif ou le quantitatif) trouvent à s'exercer. Mais d'autre part, l'interpénétration de ces disciplines, leur évolution nécessaire dans un sens plus expérimental, théorique et quantitatif, la nécessité d'assurer à tout chercheur la possibilité d'une certaine ré-orientation de ses recherches, enfin le besoin d'un minimum de formation mathématique, physique, et chimique pour tout biologiste exige la présence d'un fonds commun.

D'où l'intérêt de plusieurs niveaux.

Le premier niveau serait à atteindre par tout biologiste, y compris celui qui se destine à la biologie appliquée, à la médecine, à l'agronomie. L'enseignement correspondant tendrait non seulement à fournir les données de base nécessaires à la compréhension de la Biologie, mais a donner une éducation de l'esprit dans le sens de la rigueur du raisonnement, de l'art de dégager des relations et des lois, de la formation de l'esprit critique.

Le deuxième niveau, qui serait assuré en deuxième année de Faculté ou à la fin de la première, serait indiqué pour tous les biologistes expérimentateurs ou adonnés à la biologie quantitative, et aussi pour tous ceux qui, dans la recherche appliquée, entendent être des créateurs ; il serait également bon qu'il soit atteint, fût-ce par un effort personnel, par les professeurs de lycée, amenés à se tenir constamment au courant des développements de la Science.

Enfin, un troisième niveau concerne ceux qui font un usage particulier ou approfondi de telle ou telle discipline-support (ex. les généticiens). Mais ici l'organisation des enseignements doit être faite dans le cadre de la spécialisation.

Des programmes ne sont donc proposés que pour les deux premiers niveaux et ne sont d'ailleurs donnés qu'à titre d'exemple, une adaptation dans un sens ou dans l'autre étant toujours souhaitable pour les cas particuliers. Il semble souhaitable qu'une bonne partie du programme ait été étudiée avant l'entrée en Faculté. Même s'il en est ainsi, il ne semble pas possible de consacrer aux sciences-supports, en première année de Faculté, moins des deux tiers ou même des trois quarts de l'horaire; la proportion devant devenir beaucoup moins forte dans la seconde année, pour permettre de laisser un temps raisonnable à l'étude de la Biologie elle-même.

B. Les procédés pédagogiques.

Les procédés pédagogiques devront faire l'objet d'une attention spéciale, car la réticence de beaucoup d'étudiants biologistes à l'égard des disciplines-supports et plus particulièrement des Mathématiques, est bien souvent d'ordre psychologique.

Les cours, en particulier, devront chercher à capter la confiance de l'auditoire, à être adaptés d'une manière très précise au but poursuivi, à arriver très rapidement et sans démonstrations trop lointaines à la notion utile, et à rechercher constamment une réplique biologique à celle-ci. Les travaux pratiques, compléments nécessaires au cours, devront en outre apprendre aux étudiants à manipuler et acquérir de l'habileté manuelle, et d'autre part les mettre en contact avec les méthodes de la recherche moderne. Les exercices, en Mathématiques, notamment, seront concrets et liés au réel. Enfin des "activités dirigées", au programme plus souple sur des thèmes originaux, laissant une certaine initiative aux étudiants, pourront permettre d'assurer révisions et compléments sans lassitude ni ennui.

De tels enseignements, qui peuvent, selon le cas, être assurés par les spécialistes des sciences-supports, par les biologistes eux-mêmes, ou selon des formules intermédiaires (ex. enseignement à deux degrés, des spécialistes aux enseignants biologistes et de ceux-ci aux étudiants) doivent, de toute manière, n'être faits que par des enseignants qui à la fois possèdent les connaissances rigoureuses requises et qui manifestent pour la Biologie un intérêt spécial.

Etant donné la rapide évolution des notions et des concepts, des cours de recyclage devraient être prévus.

C. Observation particulière pour l'enseignement secondaire.

Il est hautement souhaitable que, par un enseignement continu et suffisant de la Biologie, les élèves puissent, en atteignant les classes terminales, être mis au contact des principaux aspects de la Biologie moderne, que nul homme cultivé ne devrait plus ignorer et qui constituent une partie importante de l'humanisme d'aujourd'hui.

Cela suppose que des données suffisantes soient enseignées dans les disciplines-supports, utiles, d'ailleurs en elles-mêmes et pour d'autres branches que la Biologie. Le Professeur de Biologie devra cependant être à même d'apporter les compléments nécessaires à tel ou tel point particulier.

Résumé of the article :

THE TEACHING OF MATHEMATICS, PHYSICS AND CHEMISTRY FOR BIOLOGISTS

R. Heller

This text has been prepared after preliminary studies and discussion in the working-group on "The state of the teaching of Mathematics, Physics and Chemistry for the training of future biologists" at the Congress on "The teaching of science and economic progress" organized by I.C.S.U. at Dakar in 1965.

The report deals with the following points :

1. A list of requirements (at the first and second stages) together with certain special cases.
2. Methods (teaching procedures, teachers and some directed activities).
3. The problem at the level of secondary education.
4. Examples of programmes (in Mathematics, Physics and Chemistry).

Part 5 is devoted to a general review and to some conclusions.

The development of a programme in Mathematics, Physics and Chemistry as "support-sciences" for biology must take account of two facts. In the first place biology covers a large number of disciplines where the most diverse intellectual tendencies are brought into play. On the other hand the inter-dependence of these disciplines, their evolution, the necessity to provide each researcher with the possibility of a certain re-orientation of his work, and finally, the need for a certain minimum of Mathematics, Physics and Chemistry for all biologists demands a common basis. From this follows the need of having different stages of training.

The first stage would be attended by all biologists. The corresponding teaching would have to be directed not only to furnishing the necessary basis for the understanding of biology, but to give a general education in the direction of rigorous reasoning, in the art of deducing relations and laws, and in the development of a critical attitude.

The second stage would be directed towards experimental biology or devoted to quantitative biology, as well as for future researchers ; it would also be suitable for teachers in Grammar schools.

Finally, a third stage would concern those (like the geneticists) who would need to go more deeply into a certain support-discipline, but here the organisation of the teaching would have to be made in the framework of the specialized activity concerned.

Programmes which are proposed in the report concern the first two stages and are only given by way of examples. It seems reasonable to suppose that a good part of that programme would have been studied before entry into the University. Even if that is so, it would not seem possible to devote less than two-thirds or even three-quarters of the total time to these support-sciences in the first year at the university. The proportion of a student's time would have to become much lower during the second year.

Teaching procedures would have to be given special attention ; the course would seek to capture the confidence of the audience, it would have to be adapted in a precise manner to the particular purpose and it would have to arrive rapidly and without too much proof at the notion used, and at all times it would have to look for a suitable biological replica of the notion. Practical work, which would be a necessary complement to the course, would train students in the acquisition of facility in manual work and also put them into contact with the methods of modern research. The examples, particularly in Mathematics, would have to be concrete and related to reality. Finally, there would have to be "directed activities" on original themes in which there would be a certain initiative left to the student. This would assure the possibility of revision and supplementary work which would not be too tedious.

Such teaching would not be made except by teachers who possess the necessary rigorous training and who have a particular interest in biology.

It is very desirable that in secondary education the pupils can, on attaining the final classes, be put into contact with the principal aspects of modern biology which no educated person can ignore any more, and which constitutes an important part of humanism today. That would imply that there would be a sufficiency of the support-disciplines taught.

The Mathematics programme proposed in the report is full of the modern approach and contains elements of the theory of sets, algebra and analysis, probability, statistics, as well as the theory of information and cybernetics.

LES PROGRAMMES ET LA REPARTITION DANS LE TEMPS DES ENSEIGNEMENTS DE MATHEMATIQUES POUR LES PHYSICIENS

Ch. Pisot

Un groupe de travail a fonctionné du 14 au 18 janvier. A ce groupe ont participé MM.Y. Akizuki (Math. Japon), S. Bundgaard (Math. Danemark), A. Delessert (Math. Suisse), H. Fehr (Math. U.S.A.), P. Fleury (Phys. France), B.A. Haïdara (Math. Mali), A. Lichnerowicz (Math. France), M. Minnaert (Astr. Pays-Bas), Ch. Pisot (Math. France), E. Schatzman (Astr. France), I.N. Sneddon (Math. Grande-Bretagne), M.H. Stone (Math. U.S.A.), S. Tanbunuyen (Math. Thaïlande), R.Taton (Hist. Math. France). Le projet qui en est résulté a été discuté au cours du Congrès (19-23 janvier). A la suite de l'exposé du rapporteur, il y a eu de nombreuses interventions, notamment de MM.S. Bundgaard (Math. Danemark), T.N. George (Géologie, Grande-Bretagne), P. Mariens (Phys. Belgique), M. Minnaert (Astr. Pays-Bas), E. Schatzman (Astr. France), D. Sette (Phys. Italie), Br. Thwaites (Math. Grande-Bretagne).

Le rapporteur va s'efforcer de donner un exposé d'ensemble tenant compte des interventions dans toute la mesure du possible.

I - Principes généraux.

1) Le développement des Sciences expérimentales a sans doute été plus important dans les cinquante dernières années que dans l'ensemble des siècles précédents de l'histoire de l'humanité. Or toute science est d'autant plus évoluée qu'elle peut énoncer davantage de lois. Ces lois sont exprimées dans un formalisme et une abstraction empruntés aux Mathématiques. Citons quelques exemples :

a) La quantité totale de la récolte produite par un champ rectangulaire est donnée par la formule C a b, où C est la quantité produite par un champ carré dont le côté mesure l'unité de longueur et où a et b sont les longueurs des côtés du champ mesurées avec cette même unité.

b) Dans les mêmes conditions un champ circulaire de rayon r produira une quantité de récolte égale à $C\pi r^2$.

c) Le mouvement rectiligne de l'extrémité d'un ressort plongé dans un fluide visqueux opposant une résistance proportionelle à la vitesse est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + hx = 0.$$

d) L'image de diffraction à l'infini d'une source lumineuse étendue est la transformée de Fourier de cette source.

e) L'évolution d'une population biologique sous les conditions de lutte pour la vie est décrite par des équations intégrales du type de Volterra.

f) Les fréquences des raies du spectre de l'hydrogène s'obtiennent comme différence de deux valeurs propres d'un opérateur différentiel.

Ces exemples suivent à peu près la chronologie du développement des sciences. Si l'exemple a) ne fait appel qu'à la notion de multiplication, l'exemple b) nécessite déjà la connaissance du nombre π . L'exemple c) n'est intelligible qu'à celui qui connaît la notion de dérivée et d'équation différentielle. Les exemples d) et e) nous imposent la notion des transformations intégrales et des équations intégrales. Enfin, l'exemple f) est le champ d'application de la théorie moderne des espaces fonctionnels et des opérateurs linéaires, théorie que l'étude du phénomène physique cité a largement contribué à faire éclore.

Ces exemples montrent un premier point important, c'est que l'énoncé pur et simple de la loi mathématique est insuffisant ; il faut encore posséder des connaissances mathématiques suffisantes pour que le sens même de la formule puisse être compris. Ces connaissances sont d'autant plus étendues que la science est plus évoluée, les mathématiques qui paraissaient suffisantes il y a une cinquantaine d'années, sont nettement insuffisantes aujourd'hui. On est ainsi contraint de revoir l'enseignement traditionnel des mathématiques. La somme des connaissances que l'esprit humain peut absorber à un stade donné est forcément limitée; il semble donc y avoir impossibilité à satisfaire aux besoins modernes sans allonger anormalement la durée des études.

2) Heureusement, l'évolution même des mathématiques a conduit cette dernière science à revoir ses propres fondements et à dégager plus nettement son essence. Le résultat de ces efforts est ce que l'on appelle les "mathématiques modernes" . On s'est rendu compte que les mathématiques ne sont que des déductions tenant compte de certaines règles ou axiomes et que l'être auquel s'applique le raisonnement est dans une large mesure indifférent. Ainsi, au lieu d'étudier comme autrefois des

"êtres mathématiques", on étudie des "structures" mathématiques. Cela représente une économie de pensée considérable, comparable à celle qui est résultée de l'introduction de l'algèbre dans la résolution des problèmes dont chaque type nécessitait auparavant une recette spéciale.

Cette économie de pensée permet aussi d'embrasser de plus vastes domaines dans les applications. Mais elle ouvre également l'esprit de l'étudiant à la compréhension mathématique de faits nouveaux qui pourront se présenter à lui plus tard. En effet, l'un des buts de l'enseignement actuel doit aussi être de rendre les étudiants capables de suivre l'évolution de la Science et d'être prêts à accueillir de nouvelles manières de pensée et d'habitudes au fur et à mesure du développement des idées.

Enfin la rigueur et la clarté des raisonnements doivent être dégagées le plus possible. Il faut donc séparer nettement ce qui est déduction de ce qui est constatation expérimentale ; le mélange sans discernement de ces deux choses peut fausser totalement l' esprit. Je citerai pour preuve le fait que l'enseignement de la géométrie euclidienne, tel qu'il se faisait dans les écoles où l'on confondait les notions expérimentales et les notions mathématiques, a empêché de nombreux physiciens de comprendre la relativité.

Cela ne veut pas dire que les mathématiques doivent être enseignées comme une suite de déductions abstraites ; il s'agit essentiellement de séparer clairement les propositions abstraites et déductives des propositions expérimentales et il s'agit d'entraîner les étudiants à faire toujours cette distinction. Cela est d'un grand secours chaque fois que l'on veut utiliser les mathématiques pour décrire un phénomène réel.

Il est donc hors de doute que la seule possibilité d'enseigner des mathématiques qui soient adaptées à la physique actuelle, c'est de tenir compte dans une très large mesure des "mathématiques modernes". Certains pensent qu'il ne faut pas aller trop vite, mais c'est un fait expérimental rassurant de constater que, pour les étudiants, les mathématiques modernes ne sont pas plus difficiles à apprendre que les mathématiques classiques. La seule recommandation, c'est que leur enseignement doit être émaillé d'exercices aussi nombreux et aussi bien étudiés que l'était celui des mathématiques classiques, de façon que leur utilisation effective, jusqu'au bout des calculs, soit aussi bien acquise qu'autrefois. Il est prématuré de vouloir juger et rejeter dès maintenant cet enseignement moderne qui n'a en général pas encore pu s'épanouir entièrement.

3) En tout cas, le Congrès de Dakar a été à peu près unanime à recommander l'introduction des mathématiques modernes et c'est dans cette perspective que sont rédigés les programmes proposés. Les idées géné-

rales qui se sont manifestées consistent d'abord à remarquer qu'un programme de mathématiques spécial pour physiciens ne peut raisonnablement intervenir que dans l'enseignement universitaire ou pré-universitaire. D'autre part, la Physique a besoin très tôt de notions mathématiques déjà très élaborées, qu'il semble souvent impossible de traiter de manière réellement mathématique à ce niveau. On a été ainsi conduit à séparer les programmes en deux parties : une partie correspondant au niveau intellectuel de l'étudiant et pouvant être traitée avec rigueur (partie A) et une autre partie dont le physicien a besoin et qui ne peut être enseignée que comme une technique algorithmique, la justification en étant reportée à un stade ultérieur (partie B). L'avantage de cette distinction, outre la possibilité de donner à l'étudiant des algorithmes importants, réside aussi dans le fait qu'elle permet une certaine familiarité avec une notion nouvelle, ce qui rendra plus accessibles les développements mathématiques abstraits ultérieurs.

Toutefois cette distinction entre les parties A et B, qui est exposée ici sous forme très catégorique pour bien insister sur son existence, ne peut être aussi rigoureuse dans la pratique de l'enseignement. Il est normal que dans la partie algorithmique B figurent certains développements déductifs, de même que certaines démonstrations délicates peuvent ne pas être enseignées pour des théorèmes figurant dans la partie A. Ainsi, au niveau de l'enseignement secondaire, où les équations différentielles figurent en A, le théorème d'existence et d'unicité des solutions sera un théorème énoncé sans démonstration, tandis que certaines propriétés de l'exponentielle et du logarithme, qui eux figurent en B, peuvent parfaitement être déduites avec démonstration de la définition admise (par ex. si l'on prend pour définition de log x la primitive de $\frac{1}{x}$ qui est nulle pour $x = 1$, on en déduit aisément mathématiquement la relation fonctionnelle fondamentale $\log xy = \log x + \log y$).

Il faudra évidemment aussi éviter de surcharger les programmes nouveaux ; les matières indiquées peuvent être considérées comme un maximum qui ne doit pas donner lieu à des développements complémentaires.

4) L'une des préoccupations fondamentales du Congrès est l'accord indispensable entre les enseignants de Physique et ceux de Mathématiques. Ils devraient élaborer les horaires et les plans de leurs cours de telle sorte qu'il y ait une constante référence de l'un à l'autre et qu'ils utilisent des notations communes. Le mathématicien devra absolument illustrer son cours par des exemples tirés de l'astronomie et de la physique et montrer sur ces exemples comment on peut arriver jusqu'à une valeur numérique du résultat. La notion de l'exploitation numérique des formules

doit toujours rester présente dans l'esprit du mathématicien. Il est nécessaire que quelques notions de programmation et d'analyse numérique fassent partie de tout enseignement de mathématique pour la physique.

Dans cet ordre d'idées et suivant la suggestion de M. Br. Thwaites, on pourrait aussi penser revoir les notions mathématiques sous l'aspect des phénomènes discrets et donner à ces derniers la priorité chaque fois que cela est possible, en particulier on pourrait souvent remplacer les différentielles par des différences finies.

C'est dans l'esprit de ces principes que les programmes suivants ont été proposés par le Congrès.

II - Programmes.

1) Enseignement du deuxième degré (jusque vers 18 ans).

A ce niveau, il semble qu'il n'y a pas lieu de distinguer l'enseignement des mathématiques du futur physicien de celui du futur mathématicien. Le Congrès a suivi les suggestions du groupe D (rapporteur Prof. H. Fehr). Il souhaite que l'algèbre et l'analyse soient basées sur les notions fondamentales issues de la théorie des ensembles et que même la géométrie puisse être traitée par la géométrie analytique. Les avis sur la géométrie sont assez partagés. Les uns la considèrent comme une bonne discipline, développant l'intuition, surtout à trois dimensions, et estiment qu'elle peut être traitée avec rigueur. D'autres, dont le rapporteur, pensent qu'elle est d'un niveau trop élevé pour pouvoir être traitée avec rigueur dans l'enseignement secondaire et que, si l'on ne veut pas la traiter analytiquement, elle ne peut constituer qu'un exemple intéressant d'application de certains raisonnements incomplets à l'espace physique, et que par suite elle devrait figurer en grande partie dans B.

Programme.

Partie A.

Ensembles (Symboles $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\exists$, $\forall$, négation).
Relations (Ordre, équivalence)
Fonctions (application d'un ensemble dans un autre).
Groupes
Entiers, entiers relatifs, nombres rationnels (les nombres réels sont en B).
Nombres complexes, trigonométrie.
Espaces vectoriels, systèmes linéaires (matrices et déterminants exclus).

Groupe linéaire et groupe homographique (ce dernier aussi en vue de l'optique géométrique).
Géométrie analytique.
Calcul différentiel
Equations différentielles à coefficients constants.

Partie B.

Nombres réels.
Graphiques.
Primitives et intégrales (sommes de Riemann).
Logarithme et exponentielle, règle à calcul.
Fonctions vectorielles à plusieurs variables, dérivées partielles.
Eléments de programmation linéaire.
Eléments de probabilités.

Une question qui a soulevé de grandes difficultés est l'introduction de la notion d'énergie en physique avec le matériel mathématique dont peut disposer un élève du niveau considéré. Cette question n'a pu être tranchée, elle mérite une étude approfondie.

2) Premier cycle des Facultés (2 années, 18-20 ans).

C'est à ce niveau que s'opèrera en général la séparation entre les futurs physiciens et les futurs mathématiciens. Cette séparation peut cependant être repoussée au bout d'une année ou même seulement à la fin du cycle.

Programme.

Partie A.

Algèbre linéaire. On traitera assez complètement les espaces vectoriels de dimension finie, mais sans s'interdire d'énoncer des théorèmes plus généraux si la démonstration ne fait pas appel à la finitude de la dimension. En particulier, on y traitera des matrices, comme symboles d'opérateurs linéaires, de la réduction des matrices à la forme triangulaire ou diagonale, des valeurs propres. On abordera aussi les formes linéaires et multilinéaires, un peu d'algèbre extérieure, la théorie des déterminants et des équations linéaires.

Intégration. On se contentera de l'intégrale de Riemann, sans trop de développements généraux, mais on montrera la façon d'obtenir des valeurs numériques approchées ; on donnera les extensions usuelles de la notion d'intégrale.

Séries. Séries numériques, séries entières, séries trigonométriques.
Equations différentielles. Equations classiques que l'on sait ramener à des quadratures.

Partie B.

Cette partie est assez vaste, car elle doit permettre de manier le maximum de concepts nécessaires à la Physique.

Mécanique élémentaire et relativiste.

Maniement des dérivées partielles et des champs de vecteurs.
Calcul d'une intégrale multiple (formule de Fubini et celle du changement de variables, sans démonstrations).
Intégrale de variété avec la notation des formes différentielles extérieures, formules de Stokes (tout cela sans démonstrations).

3) Deuxième cycle des Facultés (2 années, 20-22 ans).

Ici l'enseignement du futur physicien diffère nettement de celui du futur mathématicien. L'outil principal du physicien est le maniement des équations aux dérivées partielles ; le Congrès recommande donc un enseignement tourné vers les questions correspondantes. D'autre part, pour permettre une assimilation plus parfaite, il souhaiterait que l'enseignement soit réparti sur les deux années du cycle.

Programme.

Partie A.

Espaces vectoriels normés, opérateurs linéaires continus dans ces espaces, valeurs propres.
Espaces pré-hilbertiens (espaces ayant un produit hermitien, mais qui ne sont pas nécessairement complets).
Séries orthogonales et séries de Fourier.
Opérateurs auto-adjoints, opérateurs intégraux.
Equations différentielles, conditions de Sturm-Liouville.
Fonction de Green associée.
Equations aux dérivées partielles linéaires du 2e ordre dont les variables se séparent. Etude des caractéristiques dans le cas hyperbolique.
Calcul différentiel, extrêmes, équation d'Euler du calcul des variations.
Calcul différentiel extérieur, formules de Stokes.
Fonctions d'une variable complexe, éléments de représentation conforme, calcul des résidus.

Partie B.

Distributions, transformation de Fourier, convolution.
(uniquement le maniement algorithmique, sans démonstrations).
Equations différentielles, dépendance de la solution des conditions initiales.
Probabilités et Statistique. Notion d'indépendance, lois principales.
Fonction caractéristique.
Test de χ^2 et test de Student.

Il est clair que les programmes exposés doivent être adaptés à l'esprit particulier de chaque peuple et qu'ils doivent être révisés à la suite de l'expérience acquise et du développement futur de la physique. En Annexe I est reoroduit le cours de mathématiques pour physiciens du deuxième cycle de Faculté, enseigné à l'Université de Tokyo (Japon).

En particulier, la durée des cours et exercices dépend beaucoup des habitudes de chaque pays. En comparant au temps total consacré à l'ensemble de tous les enseignements, la part des mathématiques pourrait être de 1/4 dans l'enseignement secondaire pour les élèves se destinant aux sciences ; elle serait de 1/2 dans le premier cycle de la Faculté et de 1/5 dans le deuxième cycle.

Annexe I

Programme de Mathématiques pour Physiciens enseigné à l'Université de Tokyo (K. Yosida, T. Kato).

I. Algèbre linéaire, formes quadratiques.

1. Espaces vectoriels, matrices, formes quadratiques.
2. Valeurs propres de matrices hermitiennes, de matrices générales.

II. Equations différentielles.

1. Solutions par quadratures.
2. Unicité des solutions, solutions singulières.
3. Equations linéaires, superpositions, wronskien.
4. Calcul de Mikusinski, calcul opérationnel.
5. Solutions par des séries.

III. Analyse harmonique et Distributions.

1. Théorèmes de Fourier.
2. Fonctions à décroissance rapide, à croissance lente.
3. Définition des distributions, fonctions δ de Dirac, dérivation des distributions.
4. Transformée de Fourier des distributions.
5. Distributions comme généralisation des fonctions.
6. Limites dans les distributions.
7. Série de Fourier d'une distribution.

IV. Equations aux dérivées partielles.

1. Equations fondamentales de la Physique classique.
2. Conditions aux limites, variétés caractéristiques.
3. Transformation de Fourier à plusieurs variables.
4. Résolution de l'équation de la chaleur par transformée de Fourier.
5. Résolution de l'équation des ondes.
6. Equation des ondes à trois dimensions, diffraction.
7. Equation des ondes non homogène.
8. Unicité de la solution de l'équation des ondes.
9. Potentiel (Laplace, Poisson, etc)
10. Intégrale de Dirichlet, formule intégrale de Green.
11. Problème de Dirichlet - Neumann.
12. Méthode de la séparation des variables.

V. Séparation des variables et fonctions spéciales.

1. Fonctions de Bessel.
2. Harmoniques sphériques.
3. Equation de Schroedinger, polynômes de Hermite et de Laguerre.

VI. Valeurs propres et équations intégrales.

1. Transformation en équation intégrale d'un problème de valeurs propres.
2. Comment trouver les valeurs propres.
3. Inégalité de Bessel, systèmes de fonctions propres.

VII. Calcul des variations.

1. Equation d'Euler.
2. Cas de plusieurs variables.
3. Forme quadratique fondamentale.
4. Relation entre le problème des valeurs propres et le calcul des variations.

VIII. Résolution approchée des équations aux dérivées partielles.

1. Exemples.
2. Conductivité électrique, capacité électrique.
3. Estimation de l'erreur pour la valeur numérique des fonctions.

Résumé of the article :

PROGRAMMES AND THE DISTRIBUTION OF TIME FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS FOR PHYSICISTS

Ch. Pisot

The text has been prepared after preliminary discussions by the working group on the programmes and the distribution of time for the teaching of mathematics for physicists at the Congress on "The teaching of science and economic progress " organized by the Inter - Union Commission for the Teaching of Sciences of the I. C. S. U. at Dakar in 1965.

I. The report deals with the general principles involved in the teaching of mathematics for physicists.

1) A simple statement of a physical law in a mathematical form is not sufficient, it is necessary to know modern mathematics before the sense of the formula can be understood.

2) Modern mathematics, in view of its evolution, in view of its own proper objective -abstract structures, and its own method- the axiomatic method- is characterized by economy of thought, by rigour, by clarity of reasoning and by the precise distinction between abstract and deductive propositions on the one hand, and experimental propositions on the other. It is indispensable that these ideas penetrate teaching in general and the teaching of physicists in particular.

3) The teaching of physics needs, quite soon, some quite elaborate mathematical knowledge which it is difficult to develop at this level with mathematical precision. The report suggests a solution to this problem, which consists of a programme of mathematics for physicists divided into two parts A and B, the first consists of operational techniques, the justification for the techniques being postponed to a later stage, when in the second part, all will be established with the necessary mathematical rigour.

4) The necessary condition for putting these principles into effect is the agreement of the teachers of physics and those of mathematics and their continuous collaboration.

II. The report presents a project of three programmes putting into effect the principles announced above, namely, the programmes destined in

1) Teaching at the secondary level.

2) The first cycle of the university years.

3) The second cycle of university years.

The Appendix deals with the programme of mathematics for physicists taught at the University of Tokyo.

INITIATION A LA THEORIE DES PROBABILITES

A. Engel

Introduction.

Les premiers principes des notions mathématiques importantes doivent être enseignés le plus tôt possible. C'est le cas, en particulier de l'étude des "phénomènes du hasard". La théorie des probabilités est la branche la plus étendue des Mathématiques et son étude exige l'apport d'un grand nombre de notions nouvelles et inhabituelles. L'élève a besoin de temps pour se familiariser avec elles, c'est pourquoi la théorie des probabilités doit "se fondre" organiquement dans l'enseignement pour être partout, de la première à la dernière classe. Ce n'est que comme cela que "l'esprit probabiliste" pénètre profondément chez l'élève. La partie la plus importante du travail doit être effectuée lors des trois premières années d'étude "secondaire" ; en Allemagne cela correspond aux 5ème, 6ème et 7ème années de scolarité et les élèves ont de 11 à 13 ans.

L'élève n'a aucune image intuitive des notions fondamentales de la théorie des probabilités ; c'est pourquoi un cours d'initiation est indispensable. A ce stade l'élève doit comprendre les idées fondamentales et les méthodes de calcul de la théorie des probabilités par des exemples simples et par de nombreuses expériences. Ainsi un support intuitif sera créé et la théorie abstraite pourra débuter lors de la 8ème année de scolarité. L'étude des phénomènes du hasard exerce sur les élèves un attrait inhabituel et c'est pourquoi en peu de temps on réussit à les faire pénétrer profondément dans la théorie des probabilités.

Une modification essentielle de l'enseignement n'est même pas utile, bien entendu on ne peut pas se passer de la théorie des ensembles mais autrement la seule chose importante est de changer les exercices traditionnels qui à ce degré, se distinguent par une très grande pauvreté d'idées : cela provient, en partie, de l'enseignement donné dans les antiques temples de Babylone. Changer en partie ces exercices par des problèmes sur le calcul combinatoire et sur la théorie des probabilités est d'un très grand profit. Dans les pages suivantes nous soumettrons des projets précis pour les 5ème, 6ème et 7ème années de scolarité et nous les illustrerons par des exemples instructifs.

5ème année de scolarité.

A la fin de l'année, les élèves doivent être familiarisés avec les notions d'ensemble, de partie d'un ensemble, d'union, d'intersection et de complémentaire par rapport à un ensemble fondamental. On peut alors commencer l'analyse combinatoire mais en employant le langage de la théorie des probabilités.

On jette une pièce de monnaie. Elle peut tomber de deux façons :

a) Face. Dans ce cas on considère que l'on a perdu et on écrit 0.
b) Pile. Dans ce cas on considère que l'on a gagné et on écrit 1.

Ainsi la pièce de monnaie fournit des chiffres : elle engendre des nombres binaires aléatoires avec lesquels on peut alors imiter (simuler) tout processus stochastique/[1] aussi compliqué soit-il. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

On peut extraire de cette suite de chiffres un échantillon, un b l o c de chiffres binaires.

Considérons une expérience : la pièce de monnaie est lancée 4 fois et on note le résultat. Le compte-rendu de cette expérience est une fiche portant un nombre de quatre chiffres binaires, par exemple 0100. L'ensemble S de tous les résultats possibles d'une telle expérience s'appelle l'espace des échantillons. Pour l'élève, ceci n'est qu'un ensemble de fiches, qui se trouvent dans une boîte ou dans une urne (fig. 1). Les diverses fiches sont appelées points-échantillons s. Un sous-ensemble $A \subset S$ s'appelle un évènement. On introduira alors de la manière habituelle les notions d'évènement complémentaire $\bar{A} = S \setminus A$, d'évènement certain S, d'évènement impossible $\emptyset$ et les évènement $A \cup B$ et $A \cap B$. Ce n'est pour les élèves qu'une nouvelle manière de parler des symboles connus de la théorie des ensembles.

Maintenant on va étudier les fonctions de dénombrement n des sous-ensembles de S. Une première question peut s'énoncer : combien de tableaux contient S ? On répondra à cette question en triant les tableaux par leurs chiffres successifs, ce qui conduit à la représentation suivante que nous appellerons un diagramme-arbre (fig. 2).

Maintenant, on peut définir et dénombrer divers évènements possibles. Ici on doit se garder du vieil esprit babylonien. Tous les évènements n'ont pas la même valeur au cours de cette étude. Quels sont les évènements importants ?

---

1. Stochastique veut dire dû au hasard.

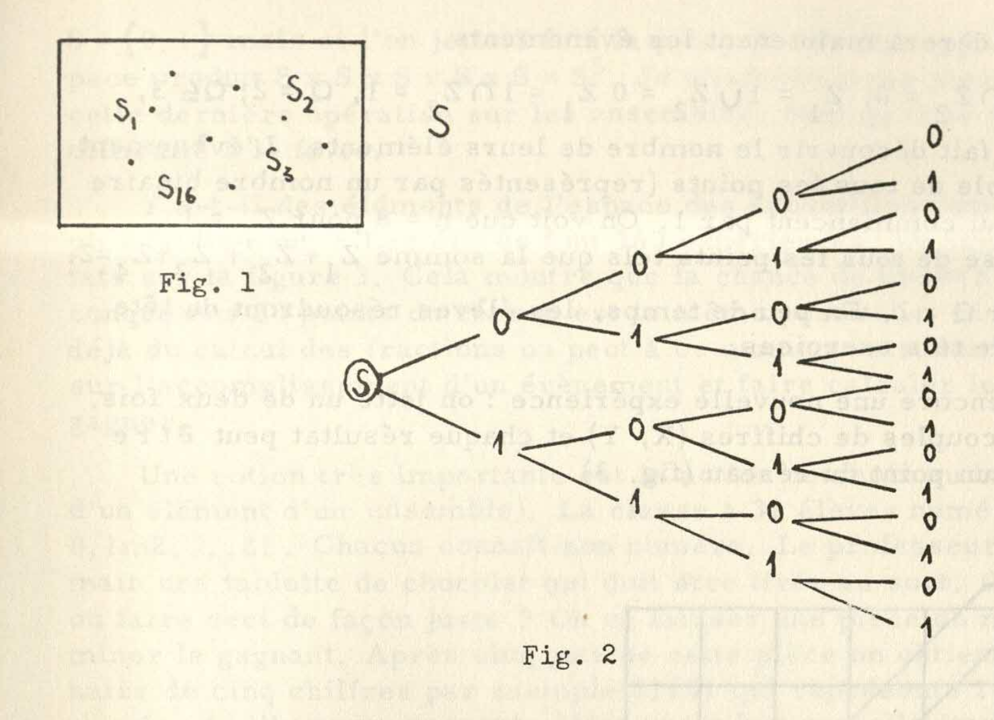


Fig. 2

En théorie des probabilités on considère des fonctions réelles définies sur l'espace des échantillons S, c'est-à-dire des applications de S dans la droite R. De telles fonctions s'appellent des variables aléatoires et traditionnellement elles sont représentées par de grandes lettres X, Y, Z ... Soit s - X (s) une telle fonction, nous nous intéressons avant tout aux évènements de la forme $X = r$, $X \leq r$, $a \leq X \leq b$... Par exemple on entend par évènement $X = r$, l'ensemble de tous les points de S en lesquels la fonction X prend la valeur fixe r, c'est-à-dire l'ensemble $\{ s \in S \mid X(s) = r \}$. Considérer ce point de vue dès le début de l'enseignement permet de gagner beaucoup de temps par la suite. On se gardera aussi de résoudre des exercices sans signification sur les cartes, les urnes, les dés et les monnaies.

Dans notre exemple (fig. 2) S est l'ensemble de tous les nombres binaires de quatre chiffres. Les chiffres d'un point s seront notés Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Ce sont des variables aléatoires qui ne peuvent prendre que deux valeurs 0 ou 1, de telles fonctions s'appellent des indicateurs, elles joueront plus tard un très grand rôle. La fonction somme des quatre variables $Q = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$ est encore plus importante : elle donne le nombre de succès Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 en quatre coups : $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 3$

$Q = 4$. On considèrera maintenant les évènements.

$Z_1 = 1$, $Z_1 = 1 \cap Z_2 = 0$, $Z_1 = 1 \cup Z_2 = 0$ $Z_1 = 1 \cap Z_2 = 1$, $Q = 2$; $Q \leq 3$, $1 \leq Q < 4$. et on fait découvrir le nombre de leurs éléments. L'évènement $Z_1 = 1$ est l'ensemble de tous les points (représentés par un nombre binaire de 4 chiffres) qui commencent par 1. On voit que $n = 8$ pour $Z_1 = 1$. $Q = 2$ se compose de tous les points tels que la somme $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 2$. Ainsi $n = 6$ pour $Q = 2$. En peu de temps, les élèves résoudront de tête des douzaines de tels exercices.

Discutons encore une nouvelle expérience : on jette un dé deux fois. S comprend 36 couples de chiffres (X, Y) et chaque résultat peut être représenté par un point du réseau (fig. 3)

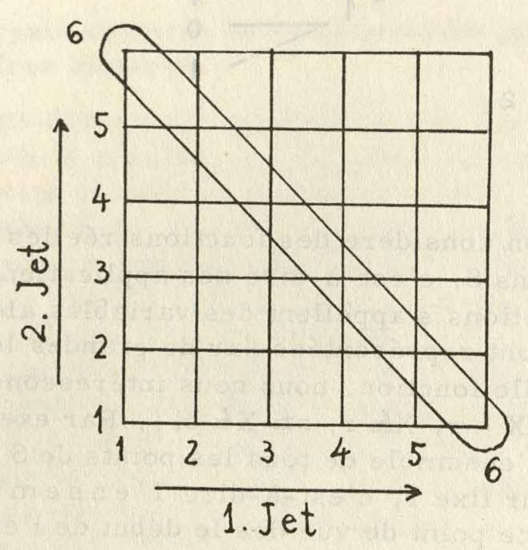


Fig. 3

On peut ensuite définir des "évènements" et déterminer le nombre de leurs éléments par exemple
$X = 2$, $X < 3$, $X = 2 \cup Y = 3$, $X < 5 \cap Y < 5$, $Y = X + 1$, $Y < X$, $4 \leq X+Y \leq 8$...

Ici la somme des coordonnées des points $Q = X + Y$ est très importante et les "évènements" $Q = r$ ($r = 2, 3..., 12$) le sont aussi. Sur la figure 3 nous avons encadré l'évènement $Q = 7$. Les élèves résolvent sans peine et de tête de tels exercices. Ils se familiarisent avec le réseau. Le concept de fonction est préparé, ils s'exercent sur les inégalités et un travail préliminaire sera déjà réalisé pour la géométrie des coordonnées. On s'exerce aussi sur toutes les opérations sur les ensembles, là apparaît tout naturellement la notion de produit d'ensembles. L'espace des échantillons naturels pour une épreuve répétée est un produit d'espaces. Par exemple un jet d'une pièce de monnaie appartient à l'ensemble

$S = \{0, 1\}$ mais si l'on jette 5 fois la pièce le résultat appartient à l'espace produit $S \times S \times S \times S \times S = S^5$. Je n'introduis pas plus explicitement cette dernière opération sur les ensembles, bien qu'il ne reste aucune difficulté à le faire.

Y a-t-il des éléments de l'espace des échantillons qui apparaissent plus facilement ? Les élèves font 360 expériences. On inscrit les résultats sur la figure 3. Cela montre que la chance de tomber sur l'un quelconque des 36 points du réseau est la même pour tous. Si l'on dispose déjà du calcul des fractions on peut à ce moment introduire des paris sur l'accomplissement d'un évènement et faire calculer les chances de gagner.

Une notion très importante est la notion de choix au hasard ("juste" d'un élément d'un ensemble). La classe a 32 élèves numérotés par 0, 1m2, , , ,21 . Chacun connaît son numéro. Le professeur a dans la main une tablette de chocolat qui doit être tirée au sort. Comment peut-on faire ceci de façon juste ? On va laisser une pièce de monnaie déterminer le gagnant. Après cinq jets de cette pièce on obtient un nombre binaire de cinq chiffres par exemple 01101 qui représente 1 + 4 + 8 = 13, numéro de l'heureux gagnant. Mais une pièce est-elle impartiale ? Avec un dé le choix va plus vite. Deux dés suffisent pour choisir parmi une classe d'au plus 36 élèves. Si l'on interprète le 6 comme zéro alors en jetant deux fois un dé, on obtient un nombre de deux chiffres dans le système à base 6 par exemple $21_6 = 1 + 2.6 = 13$.

Un élève de l'école doit être tiré au sort. Dois-je tirer au sort d'abord la classe et ensuite l'élève dans la classe ? Non ! car les classes ont des effectifs différents.

Un point du tableau doit être choisi au hasard. Comment faire cela ? Eh bien, deux élèves jettent une pièce de monnaie. On obtient deux suites de chiffres . Par exemple : x = 1101010101.. y =0110000011.. Comme x commence par 1, la moitié gauche du tableau sera éliminée. Le 1er chiffre de y est zéro, signifie que l'on supprime la moitié supérieure du tableau restant et ainsi de suite... Les deux suites de chiffres déterminent des intervalles emboîtés.

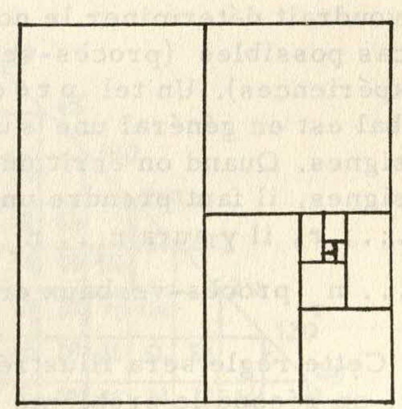


Fig. 4

Cette façon "d'encadrer" un point est très impressionnante. Lorsque la représentation décimale est déjà connue des élèves, on peut interpréter x et y comme des coor-

données binaires d'un point : (0,1101 ... 0,0110...) Pour choisir un point dans une salle on jette trois pièces de monnaie ou trois dés.

Ainsi l'élève acquiert le sentiment de "chances égales" et il se familiarise avec les nombres aléatoires... Des notions comme les nombres réels et les intervalles emboîtés sont préparées ; plus tard aussi sera simulée ainsi la distribution de Poisson ..

Mais avant tout l'élève doit apprendre ce raisonnement : on veut effectuer un choix, au hasard, alors on doit numéroter les objets et choisir un numéro à l'aide de chiffres aléatoires.

Après ce travail préparatoire, l'élève sera introduit dans l'art difficile du dénombrement. Il emploie pour cela deux principes de calcul très simples :

a) Le calcul du nombre de chemins autorisés dans un graphe orienté donné : règle de la somme.

Par exemple : la figure 5 représente un système de rues en sens unique. Combien de chemins conduisent-ils de S (départ) à Z (arrivée)? Le nombre de chemins possibles conduisant à un croisement se laisse calculer rapidement et on peut le reporter sur la figure. Ce sont les nombres de Fibonacci.

b) Le principe le plus important est la règle fondamentale (probabilités composées).

Graphe de Fibonacci

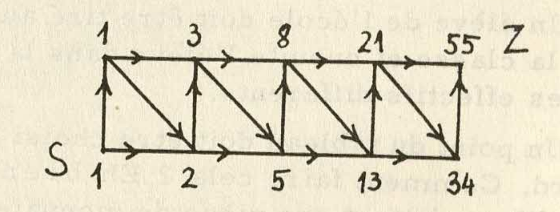


Fig. 5

On se donne une expérience. On voudrait déterminer le nombre de cas possibles (procès-verbaux d'expériences). Un tel procès-verbal est en général une suite de signes. Quand on écrit une suite de signes, il faut prendre une suite de décisions. Pour les décisions 1, 2, ..., r, il y aura n_1., n_r possibilités. Alors il y a en tout $n_1 . n_2 . n_3 \dots n_r$ procès-verbaux différents possibles.

Cette règle sera illustrée par de nombreux exemples. En particulier, on résoud le problème suivant : de combien de manières peut-on extraire un ensemble ordonné x1, x2, ... xr d'un ensemble de n éléments ? La règle fondamentale fournit aussitôt la réponse.

$$n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Pour n = r, on obtient le nombre de permutations de n éléments distincts. Pour appliquer cette règle fondamentale il faut considérer la suite des signes d'un résultat de l'expérience.

6ème année de scolarité.

On passe maintenant des échantillons ordonnés à des échantillons non ordonnés $\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$. On résoud le problème suivant : étant donné un ensemble à n éléments, combien de sous-ensembles de r éléments contient-il ? Le nombre cherché sera noté $\binom{n}{r}$.

Pour introduire cela, on peut considérer l'expérience suivante : une pièce de monnaie est jetée 10 fois, l'espace des échantillons S est ici l'ensemble de tous les nombres binaires de 10 chiffres. Une expérience peut être interprétée intuitivement comme un certain trajet aléatoire dans un plan rapporté à un repère : on part de l'origine. Avec 0 (face) on avance d'une unité vers la droite, avec 1 (pile) d'une unité vers le haut, par exemple : s = 0010111011 est dans ce réseau tout simplement un trajet partant du point (0, 0) et se terminant sur la droite x + y = 10. Le nombre de trajets partant du point (0, 0) et arrivant à un point donné se calcule simplement : chaque nombre est évidemment la somme des trajets arrivant à son voisin de gauche et ceux arrivant à son voisin de dessous.

On reconnaît le triangle arithmétique de Pascal. Maintenant on étudiera la fonction somme Q. Tous les trajets qui ont la même somme se terminent au même point. Par exemple l'évènement Q = 6 se compose de tous les trajets partant du point (0, 0) pour aboutir au point (4, 6). On en déduit que pour Q = 6, n = 210. Est-ce que les 2^{10} = 1024 trajets possibles sont équivalents (du point de vue du hasard) ? On laisse les élèves faire ensemble 1024 expériences et on obtient la confirmation de ce fait. Tous les résultats de ces expériences seront conservés. Ils contiennent 10240 nombres binaires aléatoires dont on aura un besoin impérieux plus tard : chaque élève doit, au cours de l'année, remplir un cahier de nombres aléatoires.

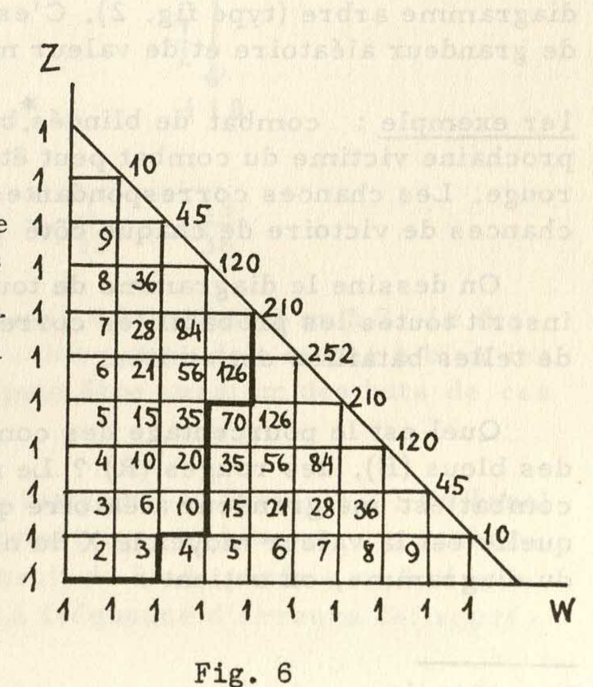


Fig. 6

Maintenant on peut achever pour toute la durée de l'enseignement secondaire le calcul combinatoire. On démontre l'équivalence des quatre problèmes suivants :

1) Combien de trajets conduisent dans le plan du point (0, 0) au point (n-r, r)?

2) Combien y a-t-il de nombres binaires, à n chiffres et de "somme totale" r ?

3) Combien un ensemble à n éléments a-t-il de sous-ensembles à r éléments (sous-ensembles non ordonnés) ?

4) Parmi n personnes, r doivent être placées dans la pièce N° 1 et le reste n - r dans la pièce N° 0. De combien de manières peut-on le faire ?

Grâce aux règles fondamentales, on démontre que le nombre de possibilités de chaque problème est

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$$

Ce résultat doit être bien appris.

Dès que les élèves auront appris le calcul des fractions, on débutera le calcul naïf des probabilités. On se limitera à des problèmes finis qui seront résolus par l'emploi soit du réseau (type fig. 6), soit d'un diagramme arbre (type fig. 2). C'est là que seront employées les notions de grandeur aléatoire et de valeur moyenne.

<u>1er exemple</u> : combat de blindés*. bleus rencontrent un blindé rouge. La prochaine victime du combat peut être soit un blindé bleu, soit un blindé rouge. Les chances correspondantes sont 1/3 et 2/3. Quelles sont les chances de victoire de chaque côté ?

On dessine le diagramme de toutes les possibilités du combat et on inscrit toutes les probabilités correspondantes. On suppose que beaucoup de telles batailles ont eu lieu.

Quel est le pourcentage des combats se terminant par la victoire des bleus (B), des rouges (R) ? Le nombre de blindés restant après le combat est une grandeur aléatoire qui peut prendre les valeurs 1 ou 2 : quelle est la valeur moyenne X du nombre de blindés restant ? A partir du diagramme, on obtient :

---

* Deux blindés

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$B = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

$$(R + B = 1),$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$$

$2|1 \xrightarrow{1/3} 1|1 \xrightarrow{1/2} 0|1$

$2|1 \xrightarrow{2/3} 2|0$; $1|1 \xrightarrow{1/2} 1|0$

Fig. 7

Maintenant on peut disputer et trancher 300 à 400 combats à l'aide d'un dé et on peut comparer les résultats avec le calcul. Ensuite on augmente la puissance de combat d'un blindé rouge dans la proportion de 1 à 2, à 3 ou à 4. Après la fin du combat arrive un second blindé rouge. Quelles sont les nouvelles chances de victoire ?

$2|1 \xrightarrow{1/3} 1|1 \xrightarrow{1/2} 0|1 \xrightarrow{1/1} 0|2$

$2|1 \xrightarrow{2/3} 2|0$; $1|1 \xrightarrow{1/2} 1|0$

$0|1 \xleftarrow{1/2} 1|1 \xleftarrow{1/3} 2|1 \xleftarrow{1/1} 2|0$; $1|0 \xrightarrow{1/1} 1|1 \xrightarrow{1/2} 0|1$

$1|1 \xrightarrow{1/2} 1|0$; $2|1 \xrightarrow{2/3} 2|0$; $1|1 \xrightarrow{1/2} 1|0$

Fig. 8

De la figure 8, on tire : $R = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{13}{36}$

Maintenant, on peut également opposer 4 blindés à 3 ou à 2. Le diagramme complet recouvre une page de cahier et on doit mener à bien des calculs de fractions très longs, ce qui peut être aussi un des buts de ces exercices.

Le <u>2ème exemple</u> est encore plus instructif : exemple 2 : Un "canal de nouvelles" perturbé. Un tel canal, symétrique et binaire, peut transporter les signaux 0 et 1. Du fait d'un bruit de fond, parfois un 0 émis est reçu comme un 1 et inversement. La fréquence d'erreurs est représentée par la figure 9.

INSTITUTE OF EDUCATION

A l'autre bout de la conduite on attend mes instructions et suivant que j'envoie 0 ou 1, deux décisions différentes seront prises. Une mauvaise interprétation a des suites très graves, c'est pourquoi j'envoie 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1. Le destinataire peut donc recevoir 32 nouvelles différentes et pour leur interprétation il prend une décision de majorité.

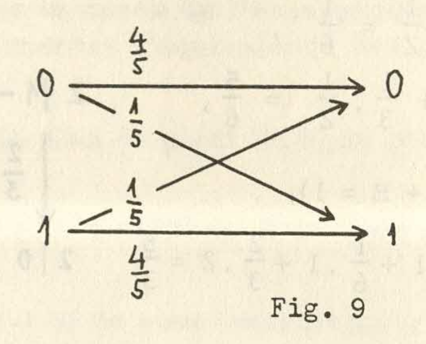


Fig. 9

a) Quel est le pourcentage de décisions exactes ?

b) La transmission d'un signal coûtant 1 DM, une mauvaise interprétation de la décision 1000 DM, quelle doit être la fréquence de répétition des signaux afin qu'à la longue la perte soit la plus petite possible ?

Il s'agit ici d'exemples de distribution binomiale, la transmission est interprétée comme un trajet aléatoire dans le réseau. Du point de vue raisonnement, la solution ne présente aucune difficulté. En revanche, le calcul de b) est si long que l'on ne peut en venir à bout que par un travail commun.

Pour a) on trouve facilement 94,208%

Pour b) la solution la moins coûteuse est celle correspondant à 15 signaux (Tableau 1).

Nombre de signaux émis :	5	7	9	11	13	15	17
Perte moyenne en DM :	62,92	40,34	24,75	22,65	20,00	19,24	19,58

Tableau 1

<u>7ème année de scolarité.</u>

- La Méthode de Monte-Carlo.

La Méthode de Monte-Carlo est une méthode de mathématiques expérimentales. Lorsqu'un problème est trop compliqué pour avoir une solution rigoureuse, on le simule : par n expériences on obtient la solution avec une précision de l'ordre de $\frac{c}{\sqrt{n}}$. Le nombre c est environ 1 quand il

ne s'agit pas d'évènements dont la probabilité est proche de 0 ou de 1. Pour employer la méthode de Monte-Carlo, on a besoin d'une calculatrice et d'une source de nombres aléatoires. Ici la calculatrice sera la classe elle-même. Souvent en deux ou trois minutes, elle pourra établir 1 000 expériences. Par cette méthode on obtiendra le chiffre cherché environ à 3% près. Malheureusement l'exploitation des expériences nécessitera plus de temps.

Pour obtenir des nombres aléatoires on utilise des pièces de monnaie et des dés ; malheureusement cela ne fait travailler que dans les systèmes à base 2 ou à base 6. Cependant, les élèves ont déjà amassé un grand nombre de chiffres aléatoires et maintenant en les examinant, les élèves apprennent deux choses :

a) Tous les chiffres, au hasard, "sortent" de façon à peu près égale.
b) Toutes les suites finies de chiffres de même longueur "sortent" aussi de façon à peu près égale.

Pour éviter des calculs fastidieux les élèves établiront aussi un tableau de nombres aléatoires dans le système décimal. En passant, remarquons ici qu'il n'y a aucun dispositif mathématique ou physique qui fabrique des nombres aléatoires.

Avec ces nombres aléatoires, on pourra résoudre expérimentalement de nombreux problèmes ; la plus grande partie des problèmes sera aussi traitée par le calcul (en partie avant, en partie après l'expérience). Théorie et pratique seront comparées. Ici la notion de variables aléatoires, de leur valeur moyenne et de leur distribution prend une place primordiale. Durant le premier semestre, on étudie des problèmes finis et simples. Dès que les élèves sauront résoudre des équations linéaires à une inconnue, on pourra passer à des espaces d'échantillons dénombrables.

<u>1er exemple</u> : (Ici on ne recherche pas la solution par le calcul). Dans un petit port en cent jours sont arrivés 300 bateaux de commerce : sur le dos du tableau, j'écris le nombre de jours où il est arrivé respectivement 0, 1, 2 ... bateaux.

Les élèves sont invités à deviner ce qu'il y a sur le dos du tableau : l'arrivée des bateaux sera simulée et le résultat sera comparé avec les nombres considérés. En temps de paix on n'utilise pas de convois et les arrivées de bateaux provenant de ports différents sont pratiquement indépendantes. C'est pourquoi on admet que les bateaux arrivent de façon aléatoire.

On utilise un tableau constitué de nombres aléatoires de deux chiffres et on extrait de ce tableau 300 couples de chiffres qui représentent les numéros des jours auxquels arrive le bateau considéré. Les valeurs réelles et celles obtenues par cette simulation s'accordent en général parfaitement.

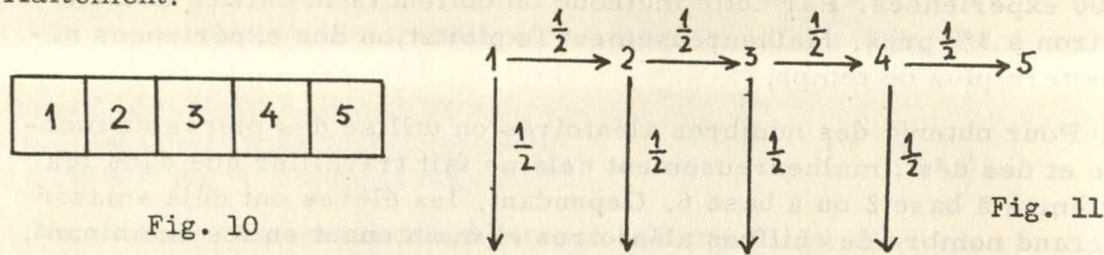


Fig. 10

Fig. 11

2ème exemple : Un jeu. Sur la figure 10, sur la case 1, on place un jeton. Par pile on avance d'une case, par face on retourne à la case n°1. Combien de coups faut-il en moyenne pour atteindre la case n° 5 ? Pour trouver ce résultat, on tire du diagramme 11 l'équation :

$$x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}(x+3) + \frac{1}{16}(x+4) + \frac{1}{16} \cdot 4,$$

$$x = 30$$

On peut imaginer de tels exercices en très grand nombre et avec une variété fascinante. Ils peuvent remplacer beaucoup de textes d'exercices conduisant aux équations et dépourvus d'esprit.

3ème exemple : De la course vagabonde d'un scarabée sur des solides réguliers et de rats dans des labyrinthes.

Un scarabée erre sur les arêtes d'un cube. Pour parcourir une arête il a besoin d'une minute. Lorsqu'il arrive à un sommet, il choisit au hasard une des arêtes partant de ce sommet et il continue son chemin. Il part en S. En Z on a placé un dispositif qui "aspire" le scarabée dès qu'il arrive en Z et il est considéré comme mort. Nous aimerions savoir combien de temps vit le scarabée.

La durée de vie X du scarabée est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ... minutes. Avec quelle fréquence X prend-elle chaque valeur possible ? Quelle est la valeur moyenne de X ? Les élèves font chez eux 1000 expériences. Ils mettent sur S une pièce de monnaie (le scarabée) et ils engendrent avec un dé un "ver" de chiffres, ou ils le prennent dans leur cahier de nombres aléatoires.

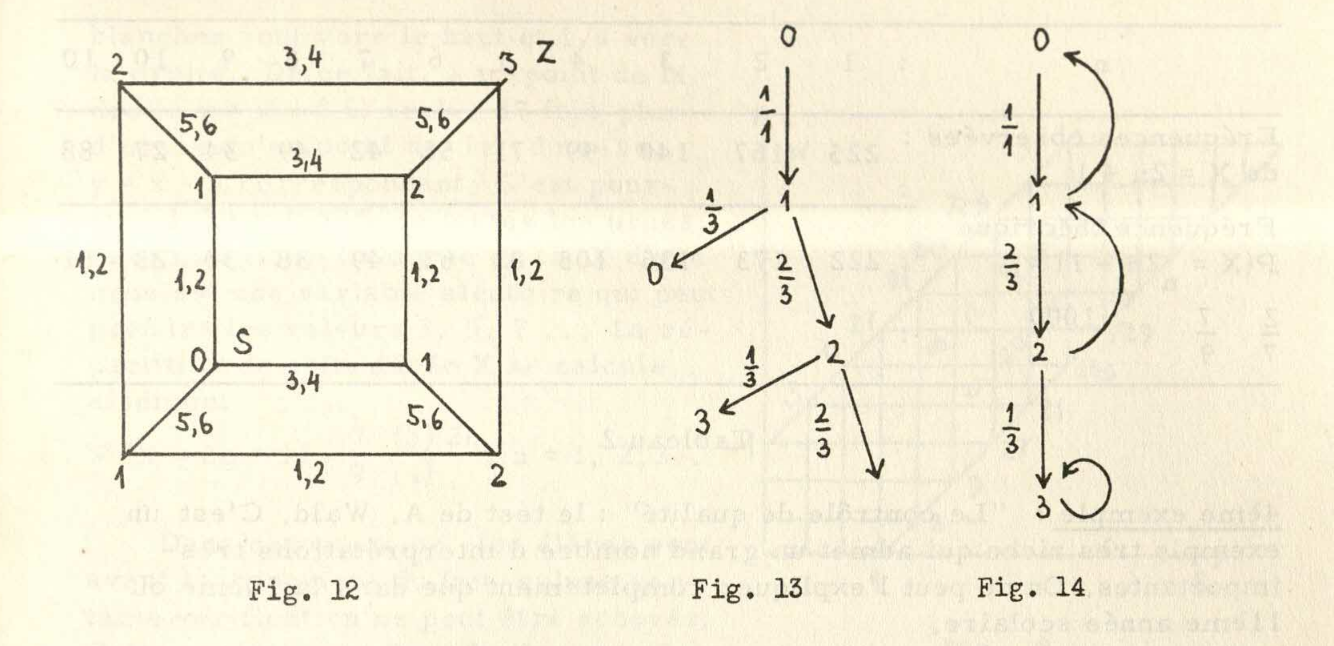


Fig. 12 Fig. 13 Fig. 14

Ces chiffres dirigent le scarabée vers Z. Les arêtes sont chiffrées sur la figure 12 et à chaque coin le dé décide sur quelle arête continue le scarabée.

Dans les heures suivantes, on fait circuler une liste sur laquelle les élèves inscrivent leurs résultats. Le problème sera traité simultanément par le calcul. Les 8 situations possibles du scarabée seront partagées en 4 classes, d'après leur distance à S. La durée de vie moyenne en 0 (= S) sera l'inconnue x. A la position 1 elle est alors x - 1 ... Du diagramme de la figure 13 on tire l'équation :

$$x = \frac{1}{3}(2 + x) + \frac{4}{9}(3 + x - 1) + \frac{2}{9} \cdot 3$$

qui donne la solution x = 10.

La répartition théorique des fréquences des grandeurs aléatoires X s'obtient facilement par la figure 14.

$$P(X = 2n + 1) = \frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Maintenant les résultats expérimentaux des élèves seront comparés avec ces valeurs théoriques. L'accord est en général bon. Le tableau 2 montre les résultats des expériences des élèves. La moyenne des trajets du scarabée dans ce cas est 10,12

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
Fréquences observées de X = 2n + 1	225	167	140	99	71	58	42	49	34	27	88
Fréquence théorique $P(X = 2n + 1) = \frac{2}{7} \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot 1000$	222	173	135	105	82	63	49	38	30	23	81

Tableau 2

4ème exemple : "Le contrôle de qualité" : le test de A. Wald. C'est un exemple très riche qui admet un grand nombre d'interprétations très importantes. On ne peut l'expliquer complètement que dans la 10ème ou 11ème année scolaire.

Une usine fabrique deux sortes d'urnes :

a) Des urnes blanches qui contiennent 3 boules blanches et une boule noire.

b) Des urnes noires qui contiennent 3 boules noires et une boule blanche.

Au sommet de chaque urne il y a une fenêtre qui permet de voir une boule après avoir secoué l'urne (tirage d'une boule et remise de celle-ci).

Pour trier les urnes on fait une succession de tels tirages. Sur la fig. 16, lorsqu'on tire une boule noire, on avance d'une unité vers la droite, lorsqu'on tire une boule blanche, on avance d'une unité vers le haut. Aussitôt que par un tel chemin aléatoire on rencontre la droite $y = x + 3$ ($y = x - 3$) on arrête l'examen et l'urne est déclarée blanche (noire). Quel est le pourcentage d'urnes mal triées ?

Solution. Considérons les urnes blanches Les droites coordonnées du plan seront considérées comme un système de tuyaux par lesquels s'écoulent les urnes. A tout croisement, en moyenne 3/4 des urnes

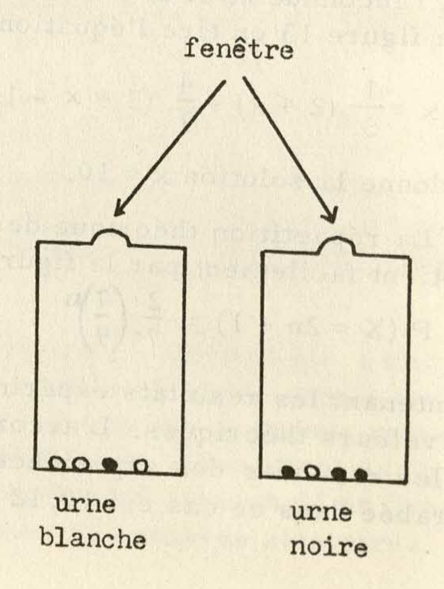


Fig. 15

blanches vont vers le haut et 1/4 vers la droite. De ce fait, à un point de la droite $y = x + 3$ il arrive 27 fois plus d'urnes qu'au point de la droite $y = x - 3$ correspondant. C'est pourquoi 1/28 = 3,57% de toutes les urnes sera mal trié. La durée du tri X d'une urne est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 3, 5, 7 ... La répartition de cette durée X se calcule aisément

$$P(X = 2n + 1) = \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}, \quad n = 1, 2, 3..$$

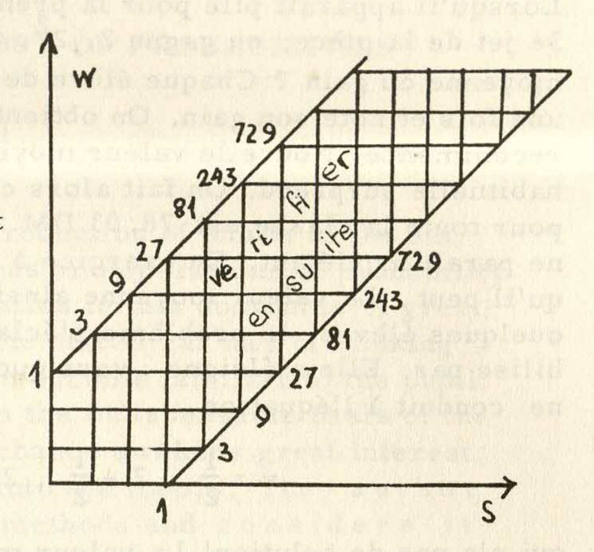


Fig. 16

Dans cet exercice, les élèves sont avant tout inquiets du fait qu'une certaine vérification ne peut être achevée. Cette crainte peut être facilement dissipée en considérant la répartition des temps de tri. Une durée très longue X est très rare. Les élèves ne peuvent pas encore calculer la durée moyenne d'un contrôle : 5, 4/7 car ils ne savent pas encore résoudre des équations à plusieurs inconnues.

Par la suite, on procède sans interruption à des décomptes statistiques. Les élèves étudient la statistique des accidents, des naissances, des décès, des suicides, les lieux d'origine des monnaies, la répartition des jours de naissances sur les divers mois. Le pourcentage des suicides dépend-il de la pression atmosphérique ? Chaque élève pourra compter le pourcentage de VW parmi 100 voitures. Individuellement les pourcentages oscillent fortement, mais dès que l'on rassemble 2, 4, 8, 16, 32 élèves, les oscillations diminuent et les valeurs moyennes se stabilisent.

Dans les exemples 2, 3 et 4, il s'agit d'expériences dans l'espace des échantillons infiris. Par le calcul des valeurs moyennes, nous avons sommé de façon astucieuse des suites infinies, par exemple dans l'exercice du scarabée.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n + 1)\frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^{n} = 10$$

Bien entendu, le procédé ne donne une solution que si les séries convergent... On peut alors éveiller la méfiance des élèves envers les ensembles S infinis en les confrontant avec des grandeurs aléatoires n'ayant pas de valeur moyenne. Le choc créé par cette épreuve les amène à maturité pour la construction exacte de la théorie des probabilités. Ils sont aussi prêts à se restreindre à des ensembles finis où il n'y a aucune surprise mauvaise.

Exemple : Le paradoxe de Pétersbourg. On jette une pièce de monnaie. Lorsqu'il apparaît pile pour la première fois, ceci au cours du 1er, 2e 3e jet de la pièce, on gagne 2, 2^2, 2^3 ... DM. Quelle est la valeur moyenne du gain ? Chaque élève de la classe fait un essai. Chacun joue une fois et note son gain. On obtient comme moyenne 10,84 DM. On recommence. Nouvelle valeur moyenne 15,35 DM. Cette oscillation inhabituelle surprend. On fait alors chacun 10 jeux. La valeur moyenne pour toute la classe est 78,03 DM : une énorme surprise. Ce phénomène paraît inquiétant. En exercice à la maison, chacun fait autant de jeux qu'il peut. La valeur moyenne ainsi calculée est de 5.175,50 DM. Pour quelques élèves, le problème s'éclaircit : la valeur moyenne ne se stabilise pas. Elle s'éloigne : vers quoi ? Le calcul de cette valeur moyenne conduit à l'équation

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2x \quad \text{ou} \quad x = 1 + x$$

qui n'a pas de solution! La valeur moyenne n'existe pas ! Qu'est-ce que cela signifie ? On montre que la valeur moyenne est infinie. La croissance rapide de cette valeur moyenne surprend même le professeur. Cependant, toutes les pièces de monnaie ne sont pas bonnes.

Résumé : Un cours d'initiation est indispensable. Les élèves y apprennent le langage de la théorie des probabilités. Ils accumulent des expériences dans le domaine des phénomènes du hasard dont le calcul des probabilités leur donne un modèle mathématique. Par la restriction des calculs à des exemples concrets, on réussit à les introduire profondément dans la théorie des probabilités par des moyens très réduits. Les élèves sont très intéressés et tout ce sujet est vraiment à sa place dans le cours de calcul et d'algèbre des classes de 5ème, 6ème et 7ème années de scolarité, si bien qu'aucune perte de temps n'est à déplorer. A partir de la 8ème année scolaire, on peut alors faire la théorie exacte du calcul des probabilités sur des espaces finis. Le point culminant se place au moment de la démonstration de la loi des grands nombres (10e année de scolarité). Lors de la 11ème année de scolarité on passe aux espaces dénombrables et on traite les chaînes de Markow et la distribution de Poisson. Nous ne voulons pas nous étendre ici sur les développements ultérieurs ni sur l'introduction de la statistique.

Résumé of the article :

PRELIMINARIES TO THE THEORY OF PROBABILITIES

A. Engel

The article gives a sketch of an introduction of pupils of the 5th, 6th and 7th years in schools to the notions and operations of probability and statistics. The preliminary preparation in this domain is of great importance since the understanding of the statistical way of thinking requires considerable time before it can become familiar to the pupil. Numerous examples and exercises form the indispensable basis of the abstract theory. Given that the idea of chance awakens great interest, the pupils are soon drawn quite deeply into the theory. The author criticises examples used in traditional methods and considers it an essential condition of modernisation in this domain that the pupil should have some acquaintance -however naïve - with elementary notions of set theory.

The programme suggested for the 5th year of teaching concerns the following notions : samples, space of samples, events interpreted in a set theoretic manner, all introduced by means of examples and simple exercises.

There follow introductions to numerical functions defined on the set of events, and to the concepts of random variable and of indicator, all accompanied by concrete problems and examples. The pupils become conscious of the process of correct sampling ; binary numbers are extensively used. Certain combinatorial formulae come out easily as the result of elementary reasoning always illustrated by numerical calculations.

In the next class (the 6th year of teaching) the formula for the number $\binom{n}{r}$ is obtained, starting from a simple problem whose graphical representation leads to the "triangle of Pascal". Some calculus of finite probabilities are started, using the schemas of trees and "nets" in the solution of problems. The notion of the mean is applied.

The preliminaries on probability in the 7th year of teaching are concentrated around the notion of random variable, of mean, and of distribution. It starts with finite processes, passing on to countable samples having already linear equations at one's disposition. Certain paradoxes which reveal new aspects of probability theory to the students are also introduced.

The programme can be carried out in strict correlation with the teaching of arithmetic and algebra. Starting from numerical examples, one obtains an understanding of the theory of probability of sufficient depth to give the necessary basis for more exact study later.

INTRODUCTION PAR LA THEORIE DES NOMBRES DES NOTIONS DE GROUPE, ANNEAU ET CORPS

Ch. Pisot

La théorie des nombres est une partie des mathématiques traitée dans l'enseignement secondaire depuis les classes les plus élémentaires, ce qui permet de l'utiliser pour donner des exemples non triviaux des notions si importantes de groupe, anneau, corps. Ces exemples sont ainsi davantage capables de faire comprendre l'importance de ces notions et montrent que ce ne sont pas seulement des étiquettes placées sur des faits bien connus.

L'exposé trouverait sa place dans les toutes dernières classes de l'enseignement secondaire, préparant les premières années universitaires.

On commence d'abord par rappeler que l'ensemble $\underset{\sim}{Z}$ des entiers relatifs possède les propriétés suivantes :

Soient $x \in \underset{\sim}{Z}$, $y \in \underset{\sim}{Z}$, $z \in \underset{\sim}{Z}$ arbitraires, alors on a

$x + y = y + x \in \underset{\sim}{Z}$; $xy = yx \in \underset{\sim}{Z}$ (commutativité)

$x + (y+z) = (x+y) + z$; $x(yz) = (xy)z$ (associativité)

$x(y+z) = xy + xz$ (distributivité)

De plus l'addition possède un élément neutre, le nombre 0, tel que $x + 0 = x$ pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}$, et à chaque $x \in \underset{\sim}{Z}$ correspond un élément "opposé", noté $-x$, de $\underset{\sim}{Z}$, tel que, $x + (-x) = 0$.

Un ensemble dont les éléments ont ces propriétés sera appelé un <u>anneau</u> (commutatif).

On remarque déjà ici qu'il y a d'autres ensembles d'entiers qui sont des anneaux. Désignons par (m) l'ensemble des entiers multiples de l'entier fixe $m \neq 0$, alors (m) est un anneau, un <u>sous-anneau</u> de $\underset{\sim}{Z}$. D'autres exemples sont fournis par l'anneau des polynômes, celui des fonctions continues.

Donnons maintenant un exemple de théorie des nombres, moins trivial : soit $d \neq 0$ un entier fixe ; dans l'ensemble $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$ des couples d'entiers, nous définissons, pour $\underline{\xi} = (x, x')$, $\underline{\eta} = (y, y')$, $\underline{\xi} + \underline{\eta} = (x+y, x'+y')$ et $\underline{\xi}\underline{\eta} = (xy + dx'y', xy' + x'y)$.

On vérifie facilement que cet ensemble constitue un anneau que nous appellerons A = A(d). Soit $\underline{\xi} = (x, x')$ un élément de A, nous posons $\underline{\xi}^* = (x, -x')$ et $N(\underline{\xi}) = \underline{\xi}\underline{\xi}^* = x^2 - dx'^2 \in \underset{\sim}{Z}$; on a alors la relation $N(\underline{\xi}\underline{\eta}) = N(\underline{\xi})\, N(\underline{\eta})$ pour tout $\underline{\xi} \in A$, $\underline{\eta} \in \underset{\sim}{A}$.

Si $\underline{\mu} \in A$ est fixe, on peut considérer le sous-anneau $(\underline{\mu})$ formé des $\underline{\xi} \in A$ tel qu'il existe $\underline{\xi}' \in A$ avec $\underline{\xi} = \underline{\xi}'\underline{\mu}$; $(\underline{\mu})$ est le sous-anneau des "multiples de $\underline{\mu}$".

Etudions maintenant les sous-anneaux d'un anneau donné. Soit A cet anneau donné, $\underline{M}$ un sous-anneau de $\underline{A}$. Nous posons $\underline{\alpha} \sim \underline{\alpha}'$ si $\underline{\alpha} - \underline{\alpha}' \in \underline{M}$; c'est une relation d'équivalence, comme on le vérifie sans peine. Les classes d'équivalence s'appellent classes modulo $\underline{M}$ et on écrit $\underline{\alpha} \equiv \underline{\alpha}'$ (mod $\underline{M}$).

Exemple : Dans $\underset{\sim}{Z}$ soit (m) le sous-anneau des multiples de $m \neq 0$, alors $a \equiv a'$ (mod m) exprime que le reste de la division de a et de a' par m est le même.

Opérations sur les classes : soit $\bar{\underline{\alpha}}$ = classe $(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \dots)$ et $\bar{\underline{\beta}}$ = classe $(\underline{\beta}, \underline{\beta}', \dots)$. On pose $\bar{\underline{\alpha}} + \bar{\underline{\beta}}$ = classe $(\underline{\alpha} + \underline{\beta}, \dots)$; cette définition est cohérente, en effet si $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha} + \underline{\mu}$, $\underline{\beta}' = \underline{\beta} + \underline{\nu}$, $\underline{\mu} \in \underline{M}$, $\underline{\nu} \in \underline{M}$, alors $\underline{\alpha}' + \underline{\beta}' = \underline{\alpha} + \underline{\beta} + (\underline{\mu} + \underline{\nu})$ et $\underline{\mu} + \underline{\nu} \in \underline{M}$, donc la classe est indépendante des représentants particuliers choisis pour définir l'addition. Cette addition est commutative et associative.

Cherchons de même à définir le produit de deux classes, en essayant de poser $\bar{\underline{\alpha}} \cdot \bar{\underline{\beta}}$ = classe $(\underline{\alpha}\underline{\beta}, \dots)$. Pour cela, avec les notations précédentes, on doit avoir $(\underline{\alpha} + \underline{\mu})\underline{\beta} - \underline{\alpha}\underline{\beta} \in \underline{M}$, donc $\underline{\mu}\,\underline{\beta} \in \underline{M}$ quel que soit $\underline{\beta} \in \underline{A}$. Le sous-anneau M doit donc posséder une propriété supplémentaire. Nous définirons alors : un <u>idéal</u> $\underline{I}$ d'un anneau $\underline{A}$ est un sous-anneau de $\underline{A}$ tel que, quels que soient $\underline{\xi} \in \underline{I}$ et $\underline{\alpha} \in \underline{A}$, on ait $\underline{\xi}\underline{\alpha} \in \underline{I}$. Si alors on suppose que le sous-anneau $\underline{M}$ est un idéal on vérifie sans peine que la définition proposée du produit de deux classes est cohérente.

Exemple : on constate immédiatement que l'ensemble des multiples de m dans $\underset{\sim}{Z}$, donc le sous-anneau (m) est un idéal de $\underset{\sim}{Z}$. L'ensemble des classes de $\underset{\sim}{Z}$ (mod m) forme donc un anneau de classes.

On a par exemple : $10 \equiv 1$ (mod 9), donc $10^n \equiv 1$ (mod 9) et $a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (mod 9) ce qui est la règle de divisibilité par 9.

Montrons encore un cas plus compliqué, la divisibilité par 7.

On a $10 \equiv 3$ (mod 7), d'où $10^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 2$ (mod 7),
$10^3 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \equiv -1$ (mod 7), ... ; par suite :

$$a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n \equiv$$

$$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - \dots \quad (\text{mod. } 7).$$

On voit facilement que dans tout anneau l'ensemble des éléments "multiples" d'un élément fixe, c'est à dire μ étant cet élément fixe de l'anneau, l'ensemble des éléments de la forme $\alpha\mu$, où α est un élément arbitraire de l'anneau, est un idéal de cet anneau ; un tel idéal sera appelé idéal principal et noté (μ).

Une question qui se pose est alors de savoir si tout idéal d'un anneau est un idéal principal. Examinons d'abord le cas particulier de l'anneau des entiers Z. Soit $M \in Z$ un sous-anneau de Z. Si M était un idéal principal (m), tout $x \in M$ serait de la forme $x = x'm$ avec $x' \in Z$. Mais avec m, le nombre $-m \in M$, donc si on choisit $m > 0$, on a $|x| \geq m$, quel que soit $\neq 0$, $x \in M$, donc m, serait le plus petit nombre strictement positif de M. Etant alors donné le sous-anneau M arbitraire de Z, désignons par m le plus petit entier strictement positif M. Comme m+m, m+m+m, ..., 0, -m, appartiennent à M, on aura $xm \in M$ pour tout $x \in Z$. Soit y un élément arbitraire de M, divisons y par m, on aura $y = qm+r$, avec $0 \leq r < m$; or $r = y - qm \in M$, donc comme m est le plus petit élément positif, on a $r = 0$. Ainsi : Théorème : tout sous-anneau de Z est un idéal principal.

Application : Théorie du p.g.c.d. dans Z. Soient $a \in Z$, $b \in Z$ deux entiers donnés. L'ensemble des $x \in Z$ qui peuvent s'écrire sous la forme $x = ua + vb$, $u \in Z$, $v \in Z$ est manifestement un sous-anneau de Z. D'après le théorème précédent c'est donc un idéal principal I ; il existe un entier $m > 0$ tel que tout $ua + vb$ soit de la forme qm avec $q \in Z$. En particulier, pour $u = 1$, $v = 0$ on a $a = a'm$, et pour $u = 0$, $v = 1$ on a $b = b'm$, $a' \in Z$, $b' \in Z$. D'un autre côté, m est lui aussi élément de I, donc il existe u_0, v_0 tels que $m = u_0 a + v_0 b$. Ainsi tout diviseur de m divise a et b et tout diviseur commun à a et b divise m; donc l'ensemble des diviseurs communs à a et b est identique à l'ensemble des diviseurs de m ; m est le p.g.c.d. de a et b et on écrit $m = (a, b)$.

Théorème : Si $(a,b) = m$ alors $(ca, cb) = cm$, quel que soit $c \in Z$. En effet les égalités précédentes montrent que l'on a $ca = ca'm = a'(cm)$ et $cb = cb'm = b'(cm)$; d'autre part on a aussi $u_0(ca) + v_0(cb) = cm$.

Définition : On dit que a et b sont premiers entre eux si $(a,b) = 1$; alors l'idéal engendré par a et b est l'anneau Z tout entier. On a alors :

Théorème d'Euclide : Si $(a, b) = 1$ et si a divise bc, alors a divise c. En effet $(ac, bc) = c$, a divise ac et, par hypothèse a divise bc, donc a divise leur p. g. c. d. c'est-à-dire c. Ce théorème est le théorème fondamental pour l'unicité de la décomposition d'un nombre en nombres premiers.

Autre application : si $(a, b) = 1$, l'équation $ax + by = c$ est toujours résoluble en entiers x, y. En effet l'idéal engendré par a et b est alors $\underset{\sim}{Z}$ tout entier, en particulier c possède une représentation sous la forme indiquée. Si x_0, y_0 est une solution particulière $ax_0 + by_0 = c$, on a, par différence $a(x - x_0) = -b\,(y - y_0)$; mais $(a, b) = 1$ il existe donc $n \in \underset{\sim}{Z}$ tel que $x - x_0 = nb$, alors $y - y_0 = -na$; réciproquement, quel que soit l'entier n, $x = x_0 + nb$, $y = y_0 - na$ est solution entière de l'équation proposée ; on a ainsi obtenu toutes ses solutions entières.

L'affirmation que tout idéal d'un anneau est principal n'est cependant pas vraie dans tous les anneaux. Considérons en effet l'anneau $A\,(-5)$ défini au début et le sous-ensemble I de cet anneau des éléments ξ de la forme $(u, 0)\,\underline{\alpha} + (v, 0)\,\underline{\beta}$ où $\underline{\alpha} = (2, 1)$, $\underline{\beta} = (3, 0)$, $u \in \underset{\sim}{Z}$, $v \in \underset{\sim}{Z}$, arbitraires. Au lieu de $(u, 0)\underline{\alpha}$, on écrira de façon abrégée $u\underline{\alpha}$.

Pour $\eta = (y, y') \in A(-5)$, on a

$$\underline{\alpha}\,\eta = (2y - 5y', y + 2y') = (y + 2y')\,\underline{\alpha} - 3y'\underline{\beta}$$
$$\underline{\beta}\,\eta = (3y, 3y') = 3y'\underline{\alpha} + (y - 2y')\,\underline{\beta} ;$$

donc $\underline{\alpha}\eta \in I$ et $\underline{\beta}\eta \in I$, par suite quels que soient $\xi \in I$, $\eta \in A(-5)$, on a $\xi\eta \in I$; ainsi I est un idéal de A(-5).

Or cet idéal n'est pas principal. En effet, supposons qu'il existe $\mu = (m, m')$ tel que $I = (\mu)$, alors on aurait $\underline{\alpha} = \xi\mu$ et $\underline{\beta} = \eta\mu$, avec $\xi \in A(-5)$, $\eta \in A(-5)$. Or $N(\underline{\alpha}) = 4 + 5 = 9$ et $N(\underline{\beta}) = 9 + 0 = 9$. Donc $N(\mu)$ diviserait 9.

Si l'on supposait $N(\mu) = 9$, on aurait $N(\xi) = N(\eta) = 1$, c'est-à-dire $x^2 + 5x'^2 = y^2 + 5y'^2 = 1$, donc ξ et η seraient de la forme $(\pm 1, 0)$ et $\underline{\alpha} = \pm\mu$, $\underline{\beta} = \pm\mu$, par suite $\underline{\alpha} = \pm\underline{\beta}$, ce qui n'est pas.

Si l'on supposait $N(\mu) = 3$, on aurait $m^2 + 5m'^2 = 3$, ce qui est impossible.

Enfin si l'on supposait $N(\mu) = 1$, on aurait $\mu = (\pm 1, 0)$ et tout $\xi \in A(-5)$ appartiendrait à I. Or, par exemple $\xi = (1, 0)$ n'est pas un élément de I, car le système $2u + 3v = 1$, $u = 0$ n'a pas de solution en nombres entiers.

Il n'est donc pas possible que I soit un idéal principal.

Posons-nous maintenant la question de savoir s'il est possible que la division soit toujours possible dans un anneau, en analogie avec la soustraction qui, elle, est toujours possible. Pour cela, il faut d'abord que l'égalité $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}\,\underline{\gamma}$ ait lieu pour tout α de l'anneau, en d'autres termes l'anneau doit posséder un élément neutre pour la multiplication, une "unité" ; dans ce cas on dira que l'anneau est "unitaire". Exemple: l'anneau $\underset{\sim}{Z}$ est unitaire avec pour unité 1, mais tous les sous-anneaux (m), $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$ ne sont pas unitaires. Considérons encore le cas de l'anneau A(d) introduit au début. Soit $\underline{\varepsilon} = (u, u')$ une unité de A(d), s'il en existe. Comme on doit avoir $\underline{\varepsilon}\,\underline{\xi} = \underline{\xi}$ pour tout $\underline{\xi}$ de A(d), on aura : $ux + du'x' = x$

$$u'x + ux' = x' \qquad \text{pour tout } x \in \underset{\sim}{Z},\ x' \in \underset{\sim}{Z} ;$$

en prenant en particulier $x = 1$, $x' = 0$, on constate que l'on doit avoir $u = 1$, $u' = 0$ et effectivement $\underline{\varepsilon} = (1, 0)$ est bien une unité. Ainsi A(d) est un anneau unitaire ; on peut voir que le sous-anneau $(\underline{\mu})$ de A(d) n'est pas unitaire si $N(\underline{\mu}) \neq \pm 1$.

Etudions enfin dans $\underset{\sim}{Z}$ l'anneau, que nous appellerons $\underset{\sim}{Z}_m$ des classes modulo m ; cet anneau est unitaire, la classe unité étant $\bar{1}$ = classe (1, ...), car $\bar{a}.\bar{1}$ = classe (a. 1, ...) = classe (a, ...) = $\bar{a}$. Donnons-nous alors $\bar{a} \neq \bar{0}$ et cherchons à déterminer une classe $\bar{b}$ telle que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Si a et b sont des entiers des classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$, il doit exister un entier c tel que $ab + cm = 1$; il en résulte que $(a, m) = 1$; par suite si a n'est pas multiple de m, il doit être premier à m ; m ne peut donc pas avoir d'autres diviseurs que 1 et m, c'est-à-dire m doit être un nombre premier.

Supposons donc que $m = p$ soit premier et soit $\bar{a} \neq \bar{0}$; un élément a de la classe $\bar{a}$ est alors premier à p, par suite il existe des entiers b et c tels que $ab + pc = 1$; il en résulte que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$. Cette classe $\bar{b}$ ainsi obtenue est unique, car s'il y avait une classe $\overline{b'}$ telle que $\bar{a}.\overline{b'} = \bar{1}$, on aurait, par différence $\bar{a}.(\bar{b} - \overline{b'}) = \bar{0}$, c'est-à-dire $a(b-b') \equiv 0 \pmod{p}$. Or p et a sont premiers entre eux, donc p divise b-b', ce qui signifie que $\overline{b'} = \bar{b}$.

Par contre si m n'est pas un nombre premier, il existe des classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$, dont aucune n'est la classe $\bar{0}$, telles que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{0}$; il suffit de prendre pour a et b deux diviseurs de m différents à la fois de 1 et de m et tels que $a\,b = m$. Dans cet anneau, non seulement la division ne sera pas toujours possible, mais si elle l'est, elle ne donne pas un élément unique.

L'ensemble $\underset{\sim}{G}$ des classes $\neq \bar{0}$ de $\underset{\sim}{Z}_p$, p premier possède ainsi les propriétés suivantes : si $\bar{a} \in \underset{\sim}{G}$ et $\bar{b} \in \underset{\sim}{G}$ alors $\bar{a}.\bar{b} \in \underset{\sim}{G}$; il existe un élément neutre $\bar{1}$ tel que $\bar{1}.\bar{a} = \bar{a}$ quel que soit $\bar{a} \in \underset{\sim}{G}$; quel que soit $\bar{a} \in \underset{\sim}{G}$, il existe $\bar{b} \in \underset{\sim}{G}$ tel que $\bar{a}.\bar{b} = \bar{1}$.

Un ensemble avec ces propriétés s'appelle un <u>groupe</u> ; dans notre cas le groupe est <u>commutatif</u>, car on a $\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$, pour tout $\bar{a} \in G$, $\bar{b} \in G$.

L'addition dans un anneau est aussi un exemple d'un groupe.

L'anneau $\underset{\sim}{Z}_p$ est ainsi un groupe commutatif pour l'opération d'addition et si l'on enlève l'élément $\bar{0}$ c'est un groupe commutatif pour la multiplication. Un ensemble ayant ces propriétés s'appelle un <u>corps</u> (commutatif).

Ainsi $\underset{\sim}{Z}_p$ est un corps ayant un nombre fini d'éléments.

L'ensemble $\underset{\sim}{Q}$ des nombres rationnels est aussi un corps, il a une infinité d'éléments.

Donnons encore un autre exemple d'un corps. Désignons par K (d) l'ensemble des éléments $\underline{\alpha}$ de la forme $\underline{\alpha} =(a, a')$, où a et a' sont des nombres rationnels quelconques ; nous munissons K(d) des mêmes lois d'addition et de multiplication que celles qui ont été définies dans A(d). Ainsi K(d) est un groupe pour l'addition ; l'élément neutre de cette addition est l'élément (0, 0). Soient alors $\underline{\alpha} =(a, a') \in K(d)$ et $\underline{\beta} = (b, b') \in K(d)$ avec $\underline{\beta} \neq (0, 0)$; cherchons à déterminer $\underline{\gamma} =(c, c')$ tel que $\underline{\alpha} = \underline{\beta}\underline{\gamma}$ Posons $\underline{\beta}^* = (b, -b')$, alors $\underline{\alpha}\,\underline{\beta}^* \in K(d)$ et on doit avoir $\underline{\alpha}\underline{\beta}^* = \underline{\beta}^*\underline{\beta}\underline{\gamma} = \underline{\gamma}\, N(\underline{\beta})$. Or $N(\underline{\beta}) = b^2 - db'^2$; ce nombre rationnel est différent de 0 pour tout $(b, b') \neq (0, 0)$ si et seulement si d n'est pas le carré exact d'un nombre rationnel. Supposons ce cas réalisé, alors

$$\underline{\gamma} = \frac{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}^*}{N(\underline{\beta})} \in K(d), \text{ donc } K(d) \text{ est un corps.}$$

Résumé of the article :

INTRODUCTION OF THE NOTIONS OF GROUP, RING AND FIELD BY MEANS OF THE THEORY OF NUMBERS

Ch. Pisot

The author uses the elements of number theory as done in school in order to give non-trivial models of certain algebraic notions and develops this idea by presenting a series of instructive and elementary examples of rings, of sub-rings, of ideals and of fields constructed from the ring Z of integers. After having established certain simple theorems on ideals he shows some direct and elementary applications (rules of divisibility, theory of greatest common divisor in Z, theorem of Euclid). The problem of the possibility of division in a ring leads to the classification of rings (unitary, non-unitary) illustrated by adequate examples. On analyzing the properties of rings of classes modulo m, he arrives at the notion of a group and of a field.

LA COORDINATION DES ENSEIGNEMENTS DE LA MATHEMATIQUE ET DE LA PHYSIQUE AU NIVEAU SECONDAIRE

vue par le professeur de mathématique

W. Servais

A. Le dialogue physique-mathématique.

1 - La physique est une source d'inspiration pour la mathématique. Elle est le principal banc d'essai de son efficacité. Ces assertions ne pourraient guère être contestées que par un mathématicien d'une espèce extra-pure pour lequel la question des origines de la mathématique et de ses usages n'ajoute rien à la signification de sa science et ne doit pas être prise en considération.

Lorsque l'on veut donner des exemples de disciplines mathématiques nées à propos de l'action de l'homme sur le réel, on pense tout de suite à la géométrie et à la mécanique qui sont sciences physiques expérimentales avant d'être sciences mathématiques rationnelles.

Il est assez naturel que l'esprit se porte ainsi d'emblée vers des chapitres de la physique qui font appel à des théories mathématiques complexes, la géométrie et l'analyse. On y voit, d'une manière spectaculaire, combien la déduction mathématique peut, à partir d'hypothèses admissibles du point de vue réel, conduire, par une voie élaborée, à des conséquences logiques permettant de prévoir le comportement de phénomènes assez distants, à première vue, des données expérimentales initiales.

L'homme comprend les phénomènes, des plus inattendus aux plus familiers, en se les expliquant, c'est-à-dire en échafaudant une trame déductive où ils paraissent, en quelque sorte, découler les uns des autres d'une manière intelligible parce que rationnelle.

Le physicien saisit l'enchaînement des faits concrets en se servant d'un double abstrait que sa raison maîtrise : le modèle mathématique.

2. Pour remonter à la source concrète fondamentale de la mathématique, il faut quitter les architectures impressionnantes de la géométrie et de l'analyse pour retrouver le moellon dont elles se composent : les

notions d'objets et d'ensembles. Les concepts ensemblistes, et l'algèbre qui les met en relation, sont les contreparties théoriques d'une physique rudimentaire : celle des objets quelconques et des manipulations concrètes pratiquées sur des aggrégats de tels objets. C'est à Ferdinand Gonseth que revient le mérite d'avoir exprimé que la logique est, au départ, une théorie physique de l'objet quelconque.

Un des faits concrets les plus sommaires est la constatation qu'un objet déterminé est présent ou absent dans un ensemble donné. La relation la plus élémentaire de la mathématique est, sans doute, l'appartenance d'un objet à un ensemble. Ainsi le caractère fondamental, à la fois pratique et théorique, des notions ensemblistes se marque dans leur origine concrète. Dès celle-ci, l'objet mathématique a un comportement qui schématise la manière d'être des objets physiques bien déterminés : il est, sans ambiguité, présent ou absent dans un ensemble donné. En conséquence, la logique des ensembles sera une logique à deux valeurs : le vrai et le faux.

Cette logique, confirmée de façon remarquable par l'expérience pour les objets à notre échelle, ne pourra plus être adéquate pour les objets à l'échelle atomique où un photon, par exemple, pourra être matérialisé par création d'une paire constituée d'un électron (négatif) et d'un positron.

Nous constatons, de la sorte, un aspect essentiel du dialogue de la physique et de la mathématique : un modèle mathématique a souvent, si pas toujours, une portée d'adéquation limitée pour expliquer le réel. Loin d'épuiser la nature des choses, il rend compte de certains faits à un niveau d'investigation donné. D'autre part, dans la pensée mathématique, l'objet s'affranchit des limitations qui lui étaient imposées par son origine empirique pour exister, par l'imagination créatrice, sans autre contrainte que la cohérence logique des théories.

La considération des ensembles infinis, créés par le mathématicien, au mépris de l'expérience des ensembles finis, a entraîné, il y a cinquante ans, une crise des fondements de la mathématique.

En même temps, la physique, par son expansion, a connu des crises successives.

De part et d'autre, chaque crise n'a pu être dépassée que par un retour de la réflexion critique sur la démarche expérimentale et sur la construction mathématique.

C'est une même volonté d'être plus lucide qui a conduit à dégager les structures de la mathématique et à inventorier toujours plus en profondeur les structures de la matière et les structures des théories physiques.

Ces dernières sont tenues à rendre compte, d'une façon cohérente, des faits expérimentaux et elles sont tributaires de l'arsenal des formes abstraites de la mathématique actuelle. Le problème de la coordination de la physique et de la mathématique n'a jamais été posé à un niveau aussi élevé ni avec une aussi grande urgence.

B. Nécessité d'une coordination des enseignements.

Les interactions de la mathématique et de la physique commandent un ajustement de leurs enseignements respectifs.

L'enseignement supérieur traditionnel n'a pas toujours réussi cet accord fructueux. A l'heure actuelle, le problème est devenu plus vaste et plus délicat par suite de la masse des matières expérimentales et théoriques et de la spécialisation obligée de chaque secteur de recherche.

Si certains hommes de sciences veulent maintenir un dialogue indispensable, d'autres, en désespoir de s'entendre, ont tendance à s'isoler chacun dans la tour de ses préoccupations les plus immédiates.

Au niveau des écoles secondaires, les problèmes ne sont ni aussi étendus, ni aussi complexes. Les professeurs de mathématique et de physique ont le devoir de chercher un terrain d'entente qui sera un terrain d'action. Ils sont tenus à le faire d'autant plus qu'il s'agit de contribuer au mieux à une première formation de jeunes esprits qui découvrent à la fois, la mathématique et la physique.

L'enseignement secondaire traditionnel ne s'est guère occupé d'établir les ponts indispensables. Aussi, combien de fois n'avons-nous pas entendu les professeurs récriminer contre les indigences des élèves :

"Ils ont appris des mathématiques et ils ne savent même pas mettre en équation le moindre problème physique".

Même si la situation est telle, faut-il sans plus mettre en accusation l'apprenti physicien et mathématicien ? La "mise en équation" est un acte synthétique qui met en jeu des activités complémentaires : se représenter mentalement le contenu concret d'une expérience, situer la question dans le cadre théorique adéquat et, enfin, traduire en expression mathématique les relations physiques en cause. Pareille conjonction dialectique ne peut être laissée à la seule initiative et sous la seule responsabilité des débutants. L'apprentissage de ces démarches doit être conduit par le professeur de physique qui, avec l'aide de son collègue de mathématique, amènera les élèves à maîtriser progressivement cette mise en oeuvre complexe.

Tout apprentissage ne peut être efficace que par l'expérience de certaines erreurs qu'il est presque indispensable de commettre pour en prendre conscience et pour parvenir à les éviter par un réflexe de contrôle.

Bref, c'est toute une éducation à faire. La coordination dont se préoccupaient les cours d'hier devient plus nécessaire aujourd'hui qu'un enseignement morcelé, à organisation faible, est remplacé par une étude structurée à ossature plus forte.

Les enseignements de la physique et de la mathématique veulent être mieux que des recueils d'éléments d'information, pour devenir des méthodes d'expérimenter et de déduire d'une façon de plus en plus consciente. Ils doivent s'épauler dans une activité commune : la mathématisation efficace de l'expérience concrète. Certes, la physique n'est pas un prétexte à des applications mathématiques, elle est une explication du réel qui veut donner un pouvoir d'action sur celui-ci.

Elle ne peut décrire et prédire que par l'outillage mental des formes offertes par la mathématique.

Sans la physique et les autres sciences, la mathématique pourrait être réduite à un jeu formel, peut-être assez vain mais toujours utile pour développer l'exercice et le pouvoir rationnels.

Sans la mathématique, la physique régresserait au rang d'une description phénoménologique tout au plus qualitative.

C. La coordination des programmes.

Les programmes d'enseignement sont les meilleures et les pires des choses. Bien conçus et équilibrés, ils offrent un cadre et une progression à l'action pédagogique. Mal structurés et trop fournis, ils contribuent à un conditionnement précipité où des procédés routiniers tiennent lieu de démarches réfléchies. Aujourd'hui, une volonté de renouveau et de promotion anime beaucoup d'auteurs de programmes qui deviennent de plus en plus, par un souci de cohérence, des plans d'études bien organisés. La mathématique enseignée, même au niveau secondaire, se veut mieux unifiée : la similitude des méthodes et des structures est plus importante que la diversité apparente des sujets.

La physique élémentaire aspire à fournir, en plus des observations et des descriptions de faits expérimentaux, une explication rationnelle de ces derniers.

Les deux disciplines doivent, dans leur déploiement, tenir compte de façon plus stricte des exigences de leur économie interne. Le problème de coordination est devenu peut-être plus délicat mais aussi, plus indispensable.

Au moment où les programmes sont en train de prendre forme, à la faveur d'essais pédagogiques, il serait impardonnable de ne pas tenter, avec le maximum de bonne volonté et de compréhension, de conju-

guer heureusement les plans d'apprentissage de deux disciplines connexes, sans parler des autres sciences.

Un examen minutieux de la coordination doit se faire pour des programmes déterminés.

Il ne peut donc trouver place ici et, sans doute, est-il préférable de voir le problème avec plus de généralité.

1. On pourrait limiter la question aux classes du cycle supérieur, pour élèves de 16 à 18 ans. Ce serait ne pas considérer ce qui est déjà acquis au cours du premier cycle (12 à 15 ans). D'après les expériences en cours en Belgique, nous savons que, dans la première moitié des études secondaires, on peut initier les élèves à des matières fondamentales :

ensembles, relations et fonctions,
nombres cardinaux,
anneau ordonné des entiers rationnels,
groupe des translations et des homothéries du plan,
corps ordonnés des nombres réels,
calcul numérique,
vectoriel à deux dimensions,
équations et inéquations linéaires à deux variables,
équation du second degré à une variable,
géométrique métrique,
groupes engendrés par les symétries axiales orthogonales :
déplacements et retournements.
produit scalaire,
cosinus, sinus et tangente.

Ces notions sont présentées dans une synthèse unifiée qui assure des échanges profitables entre la géométrie et l'algèbre.

En physique, les élèves ont, en deux ans, eu un premier contact avec les thèmes suivants :

mouvement uniforme, composition des forces, leviers, poulies ;
hydrostatique - presse hydraulique ;
miroirs et lentilles ;
thermométrie ;
électricité : éléments d'électrostatique, courants, aimants, électro aimants.

2. Au début du second cycle, le bagage mathématique et physique, non négligeable, est donc acquis.

Il couvre déjà, en gros, les besoins de la première année (15-16 ans) où le professeur de physique demande la connaissance des points suivants:

calcul numérique sur les réels et les rationnels ;
fonctions polynômes du 1er et du 2e degré ;
système de deux équations linéaires à deux inconnues ;
graphiques ;
vecteurs : somme, différence, multiplication par un réel ;
produit scalaire, cos., sin., tg.;
relations métriques dans le triangle rectangle.

Une question importante qui doit être amorcée dans le premier cycle est la mesure des grandeurs, surtout sous sa forme approchée. Elle demande des éléments sur le calcul approché par encadrement qui seront complétés, dans le second cycle, par les règles fondamentales du calcul de bornes pour les approximations.

Ce calcul, appelé improprement calcul d'erreurs, est une articulation maîtresse de la mathématique et de la physique.

Alors que du point de vue de la théorie mathématique, une grandeur a une mesure exacte, l'expérience des mesures concrètes, d'autant plus qu'elles sont précises, introduit des populations de mesures encadrées par des bornes.

Au cours des différentes opérations de calcul, les approximations permettent de situer les divers résultats par rapport aux valeurs centrales, souvent moyennes qui sont des estimations empiriques de la vraie valeur théorique des grandeurs. En fait, le calcul des approximations est une manière de concilier la multiplicité des résultats des mesures réelles avec l'unicité de la valeur théorique du modèle mathématique : la "mesure exacte" dont on parle d'une façon métaphysique.

3. Dans l'avant dernière année (16 à 17 ans), sont étudiées des notions mathématiques dont le physicien a grand besoin :

vectoriel affin et vectoriel euclidien à trois dimensions ;
éléments de topologie ;
fonctions continues et limites ;
dérivées ;
fonctions circulaires ;
fonctions exponentielle et logarithmique.

Naturellement, ces matières se répartiront sur toute l'année. Le professeur de physique ne peut espérer se servir, dès le début, des plus tardives.

4. Les intégrales, les primitives et les équations différentielles ne seront vues qu'au cours de la dernière année.

Elles constituent le point le plus avancé des questions mathématiques enseignées dans les classes secondaires.

Par suite, le professeur de physique ne pourra en disposer qu'assez tard sous une forme élaborée. Malgré la meilleure volonté de collaboration, le professeur de mathématique ne pourra sans doute rien faire de mieux.

Devant cette situation, qu'il nous faut bien regarder en face, le physicien devra examiner la succession des matières de son programme et se demander, sans préjugé routinier, si certaines transpositions ne sont pas possibles, voire souhaitables. Il lui appartient de veiller à ce que, dans sa partie théorique, son cours fasse appel à un outillage mathématique dont la complexité mentale est graduée comme il se doit.

Nous nous bornerons à quelques indications présentées sous forme interrogative.

Faut-il introduire si tôt la cinématique ?

L'optique géométrique, la calorimétrie, la statique ne peuvent-elles être étudiées d'abord ?

Est-il nécessaire de donner tout de suite l'aspect théorique d'une question quand l'étude expérimentale fournit les propriétés essentielles ?

N'y a-t-il pas un danger scientifique réel à une mathématisation prématurée ne prenant pas un appui convenable sur une expérimentation phénoménologique ? [1]

D. <u>Une conjugaison active des cours de physique et de mathématique.</u>

1. <u>Pour une véritable collaboration</u> :

Il est clair qu'une coordination des programmes ne peut être assurée de façon que le physicien trouve toujours, à point nommé, l'outil mathématique dont il a besoin.

Tout autant, il est impossible que le mathématicien dispose, à temps voulu, des exemples et des applications physiques susceptibles d'illustrer les notions mathématiques.

---

1. La rénovation actuelle des programmes de chimie fait abandonner une étude concrète, certes trop descriptive, pour une théorie explicative, à priori, de faits souvent inconnus.

Là où une programmation rigide, préétablie ne peut réussir à maintenir un synchronisme idéal, une conjugaison plus organique des cours peut les faire s'épauler alternativement chacun venant, à tour de rôle, en feed-back de l'autre.

L'expérience que nous avons prouve qu'il est utile et souvent indispensable que les élèves voient à deux reprises les thèmes mathématiques importants : une fois sous l'aspect théorique, une fois sous l'angle pratique. L'ordre de priorité étant affaire d'opportunité, d'information et d'efficacité. S'il est utile pour le physicien d'avoir à sa portée l'outil mathématique, il est aussi précieux pour le mathématicien de se servir d'un exemple physique.

Bien plus, un physicien peut être en meilleure situation pour introduire une notion mathématique et un mathématicien peut, à bon escient, éclairer une question de physique. Il n'est pas nécessaire pour cela d'en arriver à souhaiter, comme le faisait un excellent physicien-mathématicien, un peu en désespoir de cause /[1] :

" Je ne vois qu'une issue à cette situation : faire enseigner physique et mathématique par le même professeur spécialement formé dans ce but".

Cet hypothétique professeur bivalent risquerait fort de sacrifier un aspect à l'autre, sinon de compromettre le tout dans une présentation composite ...

A ce moment où la mathématique et la physique prennent si nettement conscience d'elles-mêmes, sans doute est-il préférable que chacun fasse son métier, les études seront bien gardées !

2. Quelques thèmes de coopération :

1. Le professeur de physique fournit le mathématicien.

a) Dans le calcul approché, le physicien qui peut très bien enseigner lui-même la question, sera sensible à l'ordre de grandeur des résultats plus que ne l'est souvent le professeur de mathématique.

Sous sa direction, les élèves mettront en équation des problèmes de physique rencontrés au laboratoire, au cours ou dans les livres. Les énoncés et les équations seront consignés dans un cahier où, au moment

1. Note de Monsieur A. Festraets à la Commission des programmes du Centre belge de pédagogie de la mathématique, 10 mars 1965.

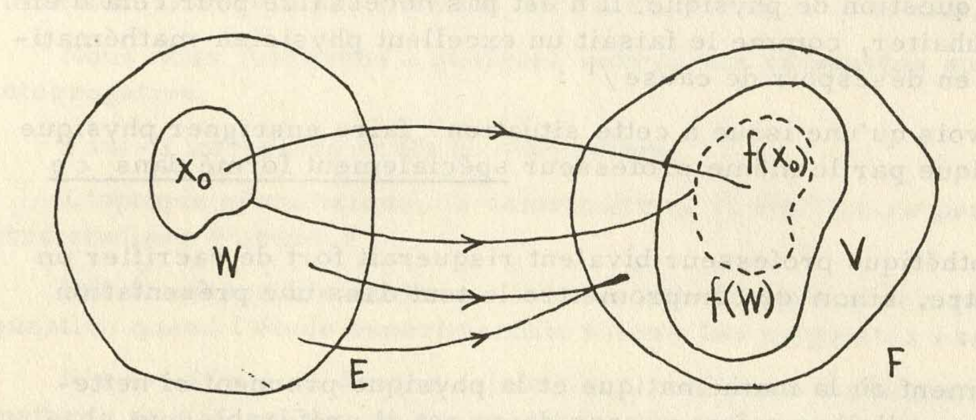
propice, le professeur de mathématique trouvera matière à calculs, à graphiques et à raisonnements.

Grâce à ce cahier de coordination, certaines solutions pourront être différées sans être perdues de mémoire. En résolvant ces problèmes, les élèves n'auront plus l'occasion de poser cette question "à quoi servent ces notions mathématiques ?"

b) La physique offre de nombreux exemples de fonctions et de transformations dans les images optiques, les changements d'états, les mouvements.

La notion topologique de voisinage permet de donner une définition très générale de la continuité d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur l'ensemble E et à valeurs dans l'ensemble F



f sera continue pour la valeur $x_0 \in E$, si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans F, il existe un voisinage W de x_0 dans E tel que l'image f(W) de W par f soit contenue dans V

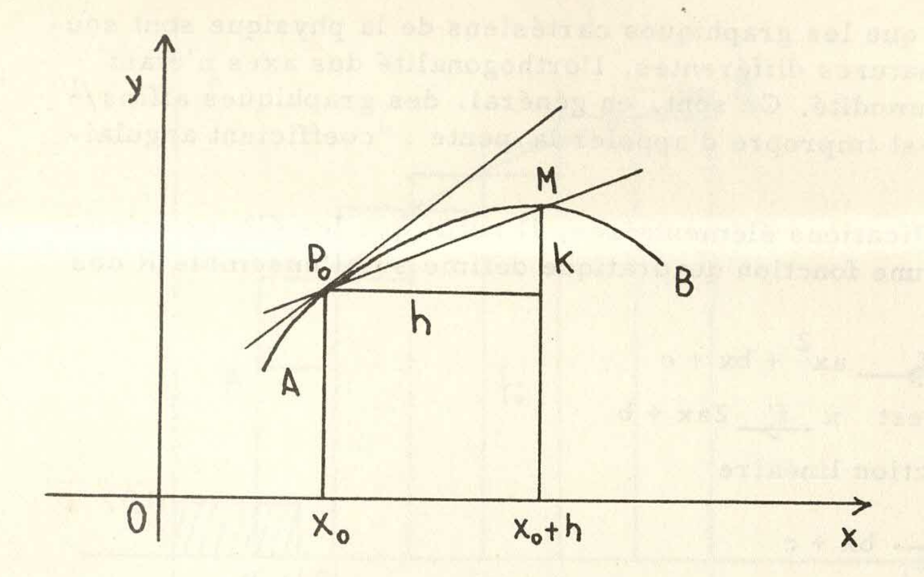
$$f(W) \subset V$$

Si nous considérons qu'il s'agit d'un effet fonction d'une cause, la continuité revient à ce que l'on peut réduire la cause de manière à ce que l'effet correspondant soit plus petit qu'un effet donné arbitrairement.

c) Pour introduire la dérivée, la physique fournit de bonnes occasions.

Soit un profil de route AB. La pente moyenne de P_0 (x_0) à M (x_0+h) est le rapport:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0}$$



de l'accroissement de l'altitude de

$$k = f(x_\circ + h) - f(x_\circ)$$

à l'accroissement horizontal $(x_\circ + h) - x_\circ = h$

auquel il correspond :

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

Pour obtenir la pente de la route au point $P_\circ$ $(x_\circ)$, il suffit d'imaginer que h devient de plus en plus petit. Le mathématicien, lui, passe à la limite pour h tendant vers 0

et il obtient la dérivée de f en $x_\circ$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

Il suffit de figurer le profil AB dans des axes oxy pour constater que la dérivée précédente est la pente de la tangente en $P_\circ$ au profil.

Par le cours de physique, les élèves prendront conscience de ce que la dérivée de la fonction f en $x_\circ$ est le taux de croissance de f par rapport à h pour cette valeur $x_\circ$.

C'est ainsi qu'apparaissent la vitesse et le débit instantanés dans un mouvement ou un écoulement non uniformes.

Remarquons que les graphiques cartésiens de la physique sont souvent à unités de natures différentes, l'orthogonalité des axes n'étant qu'affaire de commodité. Ce sont, en général, des graphiques affins/[1] dans lesquels il est impropre d'appeler la pente : "coefficient angulaire".

Pour les applications élémentaires, il suffit que les élèves calculent la dérivée d'une fonction quadratique définie sur l'ensemble R des réels

$$x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$$

et sachent que f' est $x \xrightarrow{f'} 2ax + b$

Par suite, la fonction linéaire

$$x \longrightarrow bx + c$$

a pour dérivée

$$x \longrightarrow b$$

et la fonction constante

$$x \longrightarrow c$$

a pour dérivée

$$x \longrightarrow O$$

d) Le physicien peut donner de l'intégrale définie une présentation meilleure que l'introduction élémentaire classique par les aires.

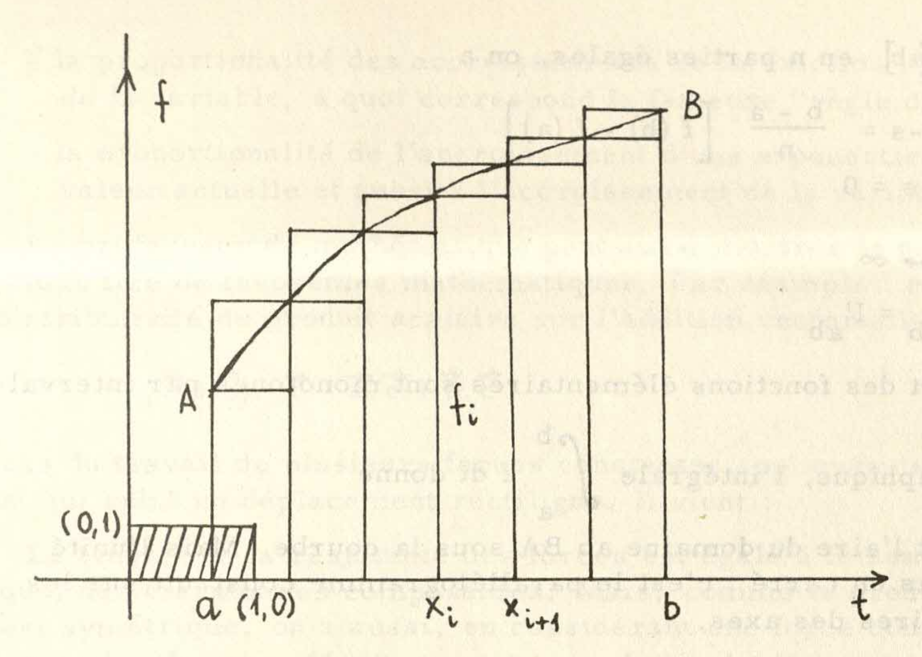
Il suffit de rechercher la détermination de l'espace e parcouru de t = a à t = b par un mobile dont on connaît la vitesse f(t).

En considérant des tronçons parcourus à vitesse constante, on a une valeur approchée de e par défaut en faisant la somme s des produits $f_i(x_{i+1} - x_i)$ d'une fonction en escaliers inférieure à f.

Une fonction en escaliers supérieure à f donne une valeur approchée S de e par excès.

On appelle intégrale par défaut de la fonction f de a à b la borne supérieure I_{ab} des valeurs telles que s approchées par défaut.

1. même dans l'exemple du profil de route, on exagère les hauteurs pour rendre le graphique plus lisible.



La borne inférieure I'_{ab} des valeurs telles S approchées par excès est l'intégrale par excès de la fonction f. On a

$$I_{ab} \leq I'_{ab}$$

Lorsque ces deux bornes sont égales, leur valeur commune est par définition l'intégrale

$$\int_a^b f\,dt$$

Dans le cas d'une fonction monotone comme celle figurée, on démontre simplement que

$$I_{ab} = I'_{ab}$$

En effet,

$$s < I_{ab} \leqslant I'_{ab} < S$$

D'où

$$I'_{ab} - I_{ab} < S - s$$

Si on divise $[ab]$ en n parties égales, on a

$$S - s = \frac{b - a}{n} \left[f(b) - f(a) \right]$$

D'où, $\lim_{n \to \infty} S - s = 0$

et $I_{ab} = I'_{ab}$

La plupart des fonctions élémentaires sont monotones par intervalles.

Sur le graphique, l'intégrale $\int_a^b f\, dt$ donne manifestement l'aire du domaine ab BA sous la courbe. Mais l'unité d'aire n'est pas un carré : c'est le parallélogramme construit sur les vecteurs unitaires des axes.

Le rapport des aires est une notion affine. C'est la raison pour laquelle elle joue un rôle si important en physique, par exemple, l'aire d'un cycle de Watt ou d'un cycle d'hystérisis est proportionnelle au travail par cycle.

II. Le professeur de mathématique vient en aide au physicien :

a) Lors de l'étude de notions importantes : fonctions linéaire, quadratique, circulaire, exponentielle et logarithmique, le professeur de mathématique aura intérêt à demander aux élèves de faire des révisions de physique. Il s'agit simplement de parcourir chaque fois le cours, les cahiers et le livre pour faire un relevé systématique, en tableau, des exemples d'emploi d'un type de fonction.

Nous avons été conduits à procéder de la sorte lorsque nous avons constaté que la reconnaissance de la forme mathématique d'une loi n'est pas aussi immédiate que l'on pourrait s'imaginer.

Il s'agissait en l'occurence, après une étude de la chute de potentiel le long d'un fil parcouru par un courant, de tracer le graphique de la fonction linéaire obtenue. Aucun des élèves, pourtant familiers avec la géométrie analytique, n'a vu à priori que le graphique cartésien serait un segment de droite.

En procédant à des relevés, on répond sans un mot à la question "à quoi servent ces mathématiques ?" On fixe en outre des idées simples mais fondamentales :

- la proportionalité des accroissements de la fonction linéaire et de la variable, à quoi correspond la fameuse "règle de trois" ;

- la proportionalité de l'accroissement d'une exponentielle à sa valeur actuelle et aussi à l'accroissement de la variable.

b) Le professeur de mathématique peut aussi montrer le parti que la physique tire de théorèmes mathématiques. Par exemple : en appliquant la distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

$$(\vec{a} + \vec{b}).\ \vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$$

au cas du travail de plusieurs forces constantes appliquées au même point qui subit un déplacement rectiligne, il vient :

Le travail de la résultante des forces est égale à la somme (algébrique) des travaux des composantes. Mais, comme le produit scalaire est symétrique, on a aussi, en considérant une force constante dont le point d'application décrit un contour polygonal : Le travail d'une force constante le long d'un contour polygonal est égal au travail de cette force le long de la résultante du contour.

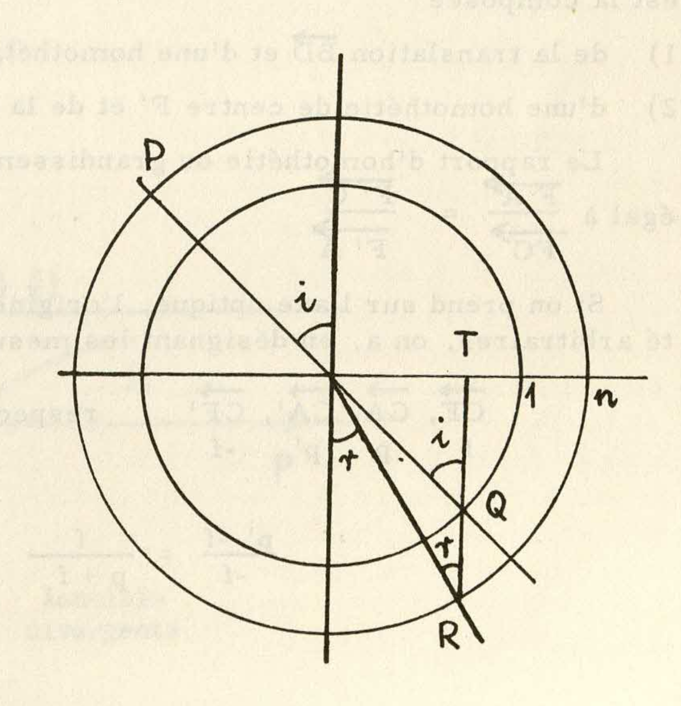
c) Le professeur a aussi avantage à faire mieux utiliser la mathématique qu'on ne le fait peut-être couramment en physique.

En donnant, par exemple, une construction du rayon réfracté dans le passage de la lumière de l'air dans l'eau.

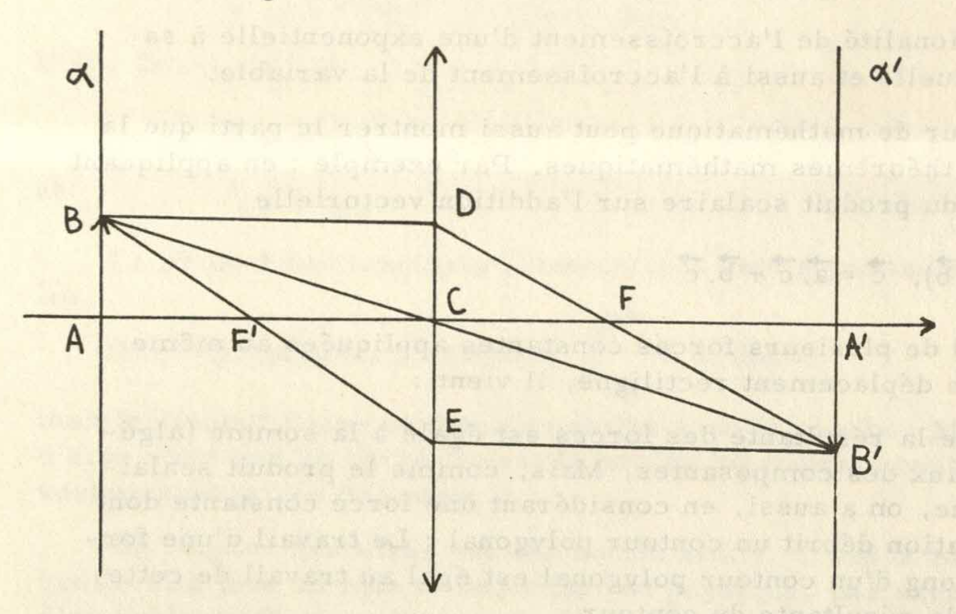
On a (fig) en dessinant un cercle de rayon n concentrique au cercle unitaire

$$\sin i = \frac{OT}{OQ}\ ,\quad \sin r = \frac{OT}{OR}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{OR}{OQ} = \frac{n}{1} = n$$



Dans la représentation classique des images données par les lentilles minces convergentes



en fait, A', B' sont les images de A et B dans une homothétie du centre C (centre optique).

Cette homothétie entre le plan α de l'objet et le plan α' de l'image est la composée

1) de la translation $\overrightarrow{BD}$ et d'une homothétie de centre F

2) d'une homothétie de centre F' et de la translation $\overrightarrow{EB'}$

Le rapport d'homothétie ou grandissement linéaire $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A\ B}}$ est donc égal à $\dfrac{\overrightarrow{F\ A'}}{\overrightarrow{FC}} = \dfrac{\overrightarrow{F'\ C}}{\overrightarrow{F'\ A}}$.

Si on prend sur l'axe optique, l'origine C, un sens positif et une unité arbitraires, on a, en désignant les mesures algébriques de

$\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{CF'}$ respectivement par

f p p' -f

$$\frac{p' - f}{-f} = \frac{f}{p + f}$$

D'où $(p' - f)(p + f) = -f^2$ (1)

et $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ (2)

De plus

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{p'}{p} \quad (3)$$

Ces formules sont valables, sans autre démonstration, pour les lentilles divergentes.

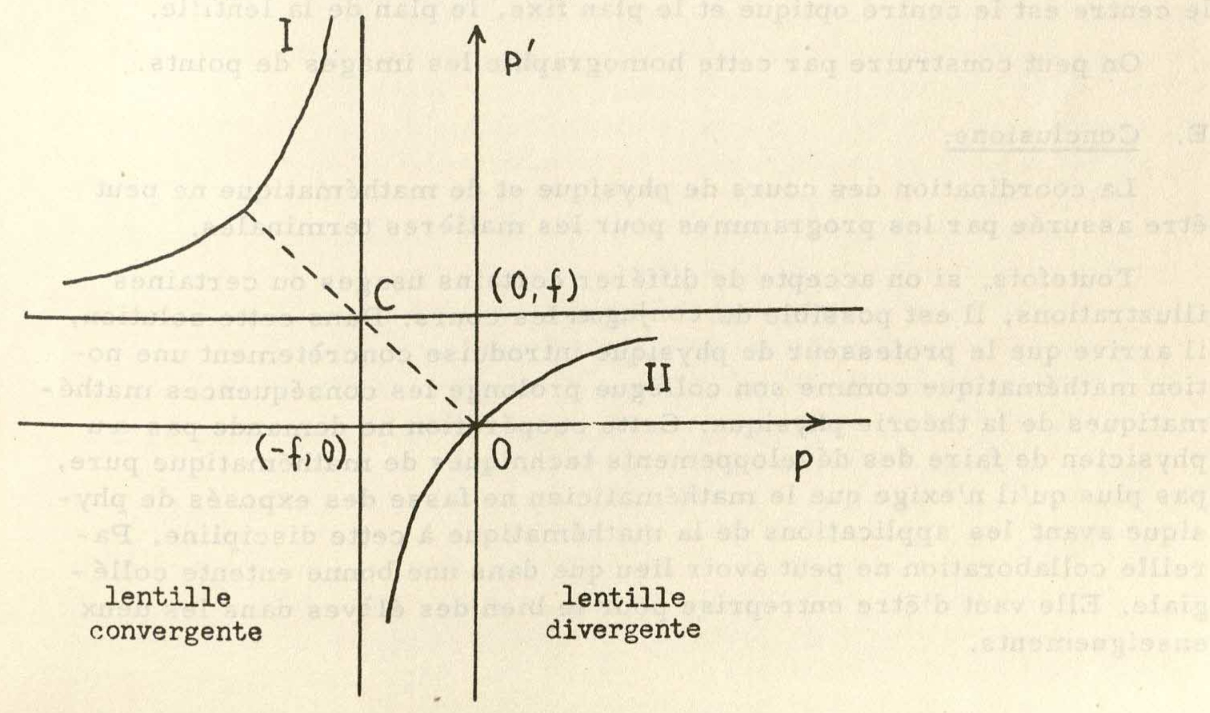
On voit comment l'utilisation de l'homothétie, au lieu des triangles semblables, donne directement les formules en grandeur et en sens pour les deux types de lentilles.

De plus, elle explique la transformation d'un objet du plan α en son image dans le plan α'.

Les formules (1) ou (2) montrent que l'abscisse p' de l'image est fonction homographique de l'abscisse p de l'objet. Dans des axes opp', cette fonction est représentée par une hyperbole ayant pour asymptotes, d'après (1), les droites d'équations

$$p' - f = 0 \qquad p + f = 0$$

Cette hyperbole passe par le point O (o, o)



On a pris le sens positif sur l'axe optique de manière que le foyer image F ait une abscisse positive (sens de la lumière incidente dans le cas des lentilles convergentes, sens opposé pour les lentilles divergentes).

Sur ce graphique on peut reconnaître toutes les caractéristiques de l'image qui est réelle et renversée sur la branche I et virtuelle, droite sur la branche II. Remarquons que puisque la correspondance entre p et p' est homographique, le rapport anharmonique d'un quaterne de points de l'axe optique est égal au rapport anharmonique du quaterne de leurs images.

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$$

Il s'ensuit que si on donne un triplet de points de l'axe et leurs images, on peut déterminer l'image de tout point sans faire usage de la lentille. Si nous désignons par $P\infty$ le point impropre de l'axe principal, le physicien considère le triplet

$$P\infty \ , F', C$$

dont les images sont

$$F, P\infty \ , C$$

Lorsque l'on respecte les conditions de Gauss, la correspondante entre les points et leurs images est une homographie de l'espace dont le centre est le centre optique et le plan fixe, le plan de la lentille.

On peut construire par cette homographie les images de points.

E. Conclusions.

La coordination des cours de physique et de mathématique ne peut être assurée par les programmes pour les matières terminales.

Toutefois, si on accepte de différer certains usages ou certaines illustrations, il est possible de conjuguer les cours. Dans cette solution, il arrive que le professeur de physique introduise concrètement une notion mathématique comme son collègue prolonge les conséquences mathématiques de la théorie physique. Cette coopération ne demande pas au physicien de faire des développements techniques de mathématique pure, pas plus qu'il n'exige que le mathématicien ne fasse des exposés de physique avant les applications de la mathématique à cette discipline. Pareille collaboration ne peut avoir lieu que dans une bonne entente collégiale. Elle vaut d'être entreprise pour le bien des élèves dans les deux enseignements.

THE COORDINATION OF THE TEACHING OF MATHEMATICS AND PHYSICS AT SECONDARY SCHOOLS

W. Servais

The author brings out the different aspects of the Physics-Mathematics problem, emphasizing the fact that the coordination of physics and mathematics has never been of such importance as it is today.

At the level of secondary schools the problems being less complex, the traditional teaching has not established the indispensable bridges between mathematics and physics. The modernization of the teaching must deal with the problem of coordinating the two subjects in order to avoid two dangers : that mathematics students may regard their subject as a formal play with symbols and that the student of physics will think of his subject as a description of phenomena from the qualitative point of view. The detailed examination of the modern programes of mathematics and of physics in Belgian secondary schools reveals some very important problems from the point of view of this coordination.

The author goes on to supplement his general remarks by considering certain possible schemes of co-operation emphasizing on the one side the contribution of the physics teacher to mathematics teaching and also the aid which the teacher of mathematics can bring to the physicist.

METHODOLOGIE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES SUJET D'ETUDE AU NIVEAU SUPERIEUR

A. Z. Krygowska /[1]

Position du problème.

En procédant à la discussion concernant le rôle de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques dans l'ensemble des études supérieures du futur professeur, il faut distinguer exactement deux aspects de la question : la méthodologie traitée soit comme étude au niveau supérieur, soit comme préparation purement technique à la profession.

La première interprétation attribue à la méthodologie de l'enseignement des mathématiques un rang comparable -dans certaines limites- à ce rang des autres sujets étudiés par les futurs professeurs, donc le rang d'une discipline ayant ses problèmes propres et ses méthodes de recherche propres.

Dans le second sens, l'instruction méthodologique aurait le caractère d'apprentissage d'un métier. L'éducation de ce genre serait basée sur la transmission aux étudiants des expériences et des connaissances par d'excellents praticiens, exprimée dans un système d'indications concrètes concernant la technique de l'enseignement selon un programme défini. Dans ce sens aussi, les stages seraient traités comme la préparation à la profession, faite sous la direction d'un maître de métier, analogue à la préparation au métier d'un artisan au Moyen-Age. L'éducation mathématique propre suivant cette conception se développerait au niveau le plus haut et aurait un caractère scientifique et moderne, l'éducation pédagogique au contraire serait réduite aux aspects plus pratiques et techniques, et se trouverait seulement en marge des études propres au futur professeur de mathématiques.

La prise de position vis-à-vis de ces deux conceptions dépend des réponses à deux questions :

a) La méthodologie de l'enseignement des mathématiques peut-elle déjà être traitée comme discipline au niveau supérieur ?
b) La préparation du professeur de mathématiques exige-t-elle de telles études ?

Je vais étudier tour à tour ces deux questions.

---

1. Extrait du texte polygraphié : Dydaktyka matematyki jako przedmiot studiow wyzszych, Wyzsza Szkola Pedagogiczna w Krakowie, Prace z dydaktyki Szkoly Wyzszej, Krakow 1965. (Documentation de la Conférence sur les proglèmes du programme de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques et les formes de sa réalisation aux écoles supérieures préparant les maîtres. Cracovie, 29-31/10/1964.)

Situation de l'éducation générale.

On se trouve aujourd'hui évidemment dans une crise de la conception même de l'éducation générale au niveau secondaire. Les connaissances traitées comme minimum nécessaire pour une personne dite "cultivée " deviennent de plus en plus larges et les résultats de l'enseignement ne sont pas satisfaisants.

Les réformes provisoires concernant tel ou tel sujet de l'enseignement sans rapport avec les autres, sans une conception d'ensemble, ne sont que des démarches à court terme. Ce qui s'esquisse néanmoins déjà aujourd'hui au sein du chaos des tendances différentes, c'est la demande d'une instruction : 1. concentrée sur une connaissance de base, qui serait structurée par les grandes idées d'une manière synthétique, et 2. visant à munir l'élève de la technique du travail intellectuel de l'habileté dans les applications des connaissances théoriques à la pratique, du besoin, de l'aptitude à renouveler et compléter continuellement les connaissances antérieurement acquises. Selon l'expression de M. Andronow de l'Institut Pédagogique de Moscou, si dans l'enseignement traditionnel on a essayé de donner aux élèves beaucoup de clefs différentes ouvrant les portes aux domaines différents, aujourd'hui, quand le nombre de clefs nécessaires grandit d'heure en heure, on cherche au contraire un système restreint de passe-partout, munissant le bachelier du pouvoir d'accès, par les voies "polyvalentes", à la connaissance se trouvant en mouvement perpétuel.

Evidemment, la recherche d'une conception nouvelle de l'éducation générale c'est, entre autres, la recherche d'un passe-partout universel, ce qui n'est pas sans rapport direct avec le mouvement de l'intégration dans la science même. Etant donné le rôle particulier des mathématiques dans ce processus de l'intégration, l'enseignement des mathématiques "pour tous" est chargé de la grande responsabilité. Une conception nouvelle des mathématiques élémentaires, celle de leur enseignement, impliquent une conception nouvelle de la recherche dans ce domaine qui aurait un caractère objectif et scientifique.

A la frontière des mathématiques et de leur enseignement.

Les conséquences de la situation décrite plus haut sont déjà visibles. Nous sommes témoins de la naissance d'un domaine des problèmes spécifiques, qui loin d'être nettement isolé des autres domaines de la recherche, mais qui au contraire est pénétré par des problèmes différents, ceux des mathématiques, de la psychologie, de la philosophie, de la pédagogie et de la sociologie. Il est évident qu'un tel ensemble de problèmes exige une recherche interdisciplinaire basée sur l'intégration des métho-

des différentes. Le caractère particulièrement spécifique à l'heure actuelle de ces problèmes dépassant les cadres de la pédagogie, sensu stricto est dû évidemment à l'attaque frontale dirigée contre le conservatisme de l'enseignement traditionnel, attaque initiée et soutenue par les savants mathématiciens. La participation active des savants à ce mouvement du renouvellement des mathématiques au niveau scolaire a révélé justement un ensemble étendu de questions surgissant à la frontière de la pédagogie et des mathématiques mêmes. Une réaction pédagogique raisonnable à la nouvelle situation exige la compréhension profonde d'un côté de l'essentiel du "conservatisme" attaqué, de l'autre de la notion même de la "modernisation", dont le sens devrait être précisé exactement, d'autant plus qu'il s'agit de décisions qui entraînent une grande responsabilité sociale et éducative de ceux qui les prennent.

On exprime grosso modo les objectifs de la modernisation dans les postulats suivants :

1) Approcher les mathématiques enseignées à l'école des mathématiques contemporaines en ce qui concerne le contenu, le langage et la méthode,

2) faire des mathématiques élémentaires une construction cohérente,

3) faire des mathématiques élémentaires un instrument largement utilisable dans l'étude théorique et dans l'activité pratique,

4) révéler les aspects humains esthétiques et affectifs de l'étude et du travail créateur en mathématiques (beauté de la construction, éléments de jeu, émotion de la recherche, satisfaction de la découverte, etc.)

Chacun de ces postulats ouvre un domaine de recherche didactique spécifique.

Le premier, par exemple, exige l'analyse "morphologique" de la mathématique et de sa méthodologie contemporaine, l'analyse dirigée vers les problèmes pédagogiques, donc ayant pour but la mise en relief de ces éléments dont la pénétration dans l'enseignement serait la condition sine qua non pour approcher les mathématiques élémentaires de la science.

Cette science ne se réduit pas au contenu même, aux notions de base, aux structures fondamentales. La recherche "morphologique" des mathématiques contemporaines du point de vue des objectifs de la pédagogie con-

cerne, par exemple, la méthode mathématique de la construction des concepts et de leurs définitions, les types de la généralisation mathématique, les types des opérations intervenant le plus souvent, les genres de vérification, le rôle fonctionnel de la symbolique, la stratégie dans la solution des problèmes, la portée et les limitations de la technique algorythmique, le langage mathématique, les degrés de la précision, etc...

Cette recherche concerne aussi la mise en relief du sens intuitif des structures abstraites mathématiques, leur rapport avec la réalité physique, leurs modèles de différentes espèces, niveaux, applications.

Les travaux de ce genre sont déjà mis en oeuvre et leurs résultats devront établir, refaire, corriger et perfectionner continuellement la base indispensable à une recherche quelconque dans le domaine de la pédagogie mathématique car si la modernisation consiste, entre autres, de faire tendre les mathématiques -dites scolaires- vers la science même, il faut avoir avant tout une conscience claire de ce dont on doit s'approcher. Justement en fonction de ces objectifs, il faut bien préciser les moyens efficaces de les atteindre, ainsi que les moyens de vérifier les résultats obtenus. Ce n'est pas par l'introduction à l'école de telle ou telle matière -ce qui peut être réalisé par un décret a priori- qu'on modernisera l'enseignement. Il s'agit d'une chose beaucoup plus difficile, c'est-à-dire, selon l'expression de H. Freudenthal, "d'un enseignement moderne des mathématiques" et pas seulement "d'un enseignement des mathématiques modernes" ce qui exige une compréhension particulièrement profonde de la structure et du style des mathématiques d'aujourd'hui.

Ce style se révèle et concrétise, au moyen de comparaisons, des contrastes, par exemple au cours de l'analyse du développement historique des notions, des raisonnements, des méthodes du langage mathématique, etc. Nous trouvons ici un domaine extrêmement intéressant pour la recherche du point de vue de l'enseignement. La prise de conscience du processus de la transformation des mathématiques du nombre et de la forme des siècles anciens dans la mathématique des structures générales de notre siècle, est d'une grande importance pour la pédagogie des mathématiques. Il ne s'agit pas de l'histoire des dates et des faits, mais de l'analyse profonde du processus historique même, du genre des commentaires historiques de Bourbaki. Une étude semblable mais dirigée consciemment vers les besoins de la théorie de l'enseignement des mathématiques jette la lumière sur la genèse, le développement, le perfectionnement des instruments de la pensée mathématique, mettant en relief dans la perspective historique les éléments les plus essentiels de la modernisation d'aujourd'hui. Les cours universitaires

d'histoire des mathématiques ainsi conçus n'ont pas encore trouvé une place adéquate au sein des études supérieures des futurs professeurs. L'expérience faite à l'Université de Cracovie (cours du Professeur Dt. Z. Opial : "L'histoire des notions mathématiques") prouve que le postulat en question mérite d'être pris en considération. Il faut souligner que ceux qui s'occupent au niveau supérieur de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques devraient participer à cette recherche.

La recherche à la frontière des mathématiques et de la pédagogie est très importante aussi d'un autre point de vue. Dans le processus de l'apprentissage, nous trouvons beaucoup d'aspects caractéristiques de stratégie et de technique du travail créateur d'un savant. Selon l'expression de J. Bruner, la différence immense dans le degré de l'abstraction nous fait oublier l'analogie qualitative de ces deux processus. En pleine conscience de l'existence de cette analogie, nous constatons que la connaissance -même partielle, même simplifiée - de la stratégie et de la technique du travail d'un mathématicien, du rôle de l'intuition et du formalisme dans le travail etc., est absolument nécessaire pour la formation correcte du processus didactique.

Cette analyse doit être initiée et organisée par celui qui en a besoin. Elle n'est pas nécessaire à un mathématicien créateur, de même qu'une analyse détaillée des mouvements d'un nageur n'est pas nécessaire à celui qui nage habilement, étant néanmoins absolument nécessaire à celui qui tâche d'enseigner aux autres l'art difficile de la natation.

Evidemment, celui qui a étudié les mathématiques au niveau supérieur connaît certains aspects d'efforts créateurs dans les mathématiques. Malheureusement, souvent après avoir fini ses propres études, le professeur oublie ces expériences. Il faut les mettre en lumière, il faut enregistrer certains procédés objectivement valables.

Les mathématiciens eux-mêmes, en marge de leur propre travail, nous fournissent certains renseignements précieux concernant le fonctionnement de la méthode et de la pensée mathématique (il suffit, par exemple, de mentionner les remarques de Poincaré, Bouligand, Lebesgue, Hadamard, Klein, Hintchin, Polya, Fréchet, Freudenthal, Kolmogorov, etc.. et récemment Bourbaki, dans ses articles consacrés à l'enseignement). Il ne faut pas oublier que ce qui se trouve en marge du travail d'un mathématicien professionnel se trouve souvent au contraire au centre même de l'intérêt pédagogique, c'est pourquoi cette "marge" doit être prise en considération dans la recherche pédagogique.

Réunir, comparer, synthétiser, ordonner la documentation, dont je viens de parler et y révéler aussi certains aspects pédagogiques, c'est une partie du travail méthodologique très importante.

Notre expérience prouve qu'il y a beaucoup de sources semblables qui n'ont pas été jusqu'alors suffisamment exploitées. Pour donner un exemple, je peux citer l'étude comparative des métamorphoses successives de la démonstration du même théorème présentée dans les traités et manuels différents. L'analyse détaillée de ces métamorphoses révèle la pensée mathématique en mouvement se purifiant pas à pas, se libérant des aspects non essentiels, dirigée vers la simplicité et la clarté ; mais, d'autre part, on y voit que cette transformation n'est pas facile, on observe le travail dur de l'esprit, la peine qu'on a à dégager l'essentiel, c'est ce qui jette la lumière sur les conditions intérieures du travail intellectuel de l'élève, évidemment fait au niveau très bas, très primitif, mais tout de même mutatis mutandis, procédant d'une manière semblable.

Recherche de la conception des mathématiques élémentaires et construction du programme.

Un autre groupe de problèmes liés à la modernisation de l'enseignement des mathématiques est concentré autour de la notion des mathématiques élémentaires, ainsi qu'autour de la méthode de construction des programmes.

L'expérience historique nous a conduits à une conception dialectique des mathématiques élémentaires conçues comme une structure variable en mouvement, fonction de l'étape donnée de l'évolution de la science, de la technique et de celle des relations sociales. Ce point de vue n'est pas encore admis partout ; on lui oppose des arguments presque métaphysiques se référant à un ordre "naturel", à une structure a priori des notions mathématiques qui devrait aussi être conservée dans l'enseignement. Ce point de vue entraîne évidemment la pétrification des programmes. La conception dialectique et historique des mathématiques élémentaires pose au contraire de nouveaux problèmes à chaque génération de ceux qui s'occupent de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques. Le résultat concret de ce travail est le programme scolaire.

La conception dialectique des mathématiques élémentaires implique la conception du programme ouvert, c'est-à-dire du programme qui pourrait être transformé successivement sans nécessité d'ébranlement du système d'ensemble de l'enseignement. Si aujourd'hui une révolution semblable est inévitable, malgré tous les risques possibles, nous sommes obligés de tirer de cette grande leçon historique des conclusions raisonnables. On cherche donc la méthode de construction du programme se prêtant aux reconstructions et à l'évolution continue.

La méthodologie du travail concernant la construction du programme de mathématiques se trouve malheureusement in statu nascendi. Nous n'avons pas encore élaboré de critères objectifs du choix du contenu et des principes de construction du programme de mathématiques. La discussion s'égare encore dans le chaos des termes dont le sens n'est pas défini. On utilise les termes "instructif", "utile", "trop abstrait", "trop formel", "intuitif", "moderne", "traditionnel" en défendant ou rejetant tel ou tel point du programme, mais très souvent il serait difficile de mettre au point la signification de ces "slogans", dans la bataille opposant les "réformateurs" d'un côté et les "conservateurs" de l'autre. Et il faut avouer que souvent les uns comme les autres ne savent pas répondre clairement à la question "pourquoi", car la réponse à cette question exige avant tout la définition très précise des objectifs de l'enseignement , ne se bornant pas aux généralités.

Heureusement, on a commencé déjà les travaux qui tâchent d'introduire les critères objectifs dans ce domaine. En ce qui concerne la notion d'"utilité"il faut mentionner par exemple les tentatives à bien préciser le contenu mathématique nécessaire à certaines professions et à l'étude supérieure des mathématiques mêmes, ainsi que celle de certaines sciences. Il reste encore néanmoins beaucoup à faire dans ce domaine.

La méthode de construire des programmes selon l'idée de M. Freudenthal, enseigner de la manière éducative et moderne, ce qui est utile dans la situation concrète de l'époque donnée, est en voie d'élaboration.

A la frontière de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques, de la psychologie et de la sociologie.

Tous nos principes théoriques ne peuvent nous servir que comme hypothèse du travail, qui doit être soumise à l'épreuve de l'expérience dont le point central est l'élève même, considéré d'un côté dans l'étape définie de son développement mental personnel, et de l'autre vu comme un être vivant dans une situation sociale définie et dans la civilisation technologique d'aujourd'hui. Donc l'élève comme être concret et non comme modèle abstrait.

En mettant en évidence cet aspect de nos problèmes méthodologiques, nous passons aussitôt dans les domaines de la psychologie et de la sociologie. Il faut avouer que jusqu'alors les relations mutuelles de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques et de ces disciplines ne sont pas suffisamment développées. Nous posons aux psycho-

logues et aux sociologues des questions concrètes évidemment très difficiles, nous avons besoin de réponses directement utilisables dans notre recherche. D'autre part, nous savons que nos expériences pédagogiques en classe apportent continuellement des vues nouvelles inattendues souvent par le psychologue qui se borne à la recherche sur l'individu, faite dans un laboratoire, ainsi que par un sociologue qui, s'appuyant sur les données statistiques souvent passe sous silence l'individu. Au contraire, l'enseignement scolaire révèle d'une manière particulièrement claire les aspects différents de l'interaction de la pensée individuelle et de celle qui se forme en groupe. La nécessité de la recherche interdisciplinaire dans ce domaine est évidente. L'urgence de la question a été soulignée souvent au cours de Congrès consacrés à l'enseignement des mathématiques. Il suffit de mentionner comme exemples : le congrès de Californie en 1959, le Symposium de Budapest en 1962, la Conférence de la C.I.E.A.E.M. d'Oberwolfach en 1964. La documentation sur ces congrès révèle d'un côté l'étendue et la portée des problèmes psychologiques et sociologiques actuellement ouverts concernant la modernisation de l'enseignement des mathématiques. D'un autre côté, elle met néanmoins en évidence les difficultés auxquelles se heurte la collaboration des mathématiciens et des psychologues ; les résultats de cette collaboration sont encore très limités, souvent ne dépassant pas des généralités peu opératives ou, au contraire, s'égarant dans de petits détails ne se prêtant pas à une synthèse prête a être utilisée pratiquement dans l'enseignement.

L'élaboration de la méthodologie des travaux interdisciplinaires dans ce domaine est donc une question qui se trouve à l'ordre du jour. La recherche psychopédagogique et sociopédagogique de l'enseignement moderne ne pouvant être organisée sans la collaboration conjuguée du psychologue et du mathématicien. L'entente efficace est évidemment encore difficile mais indispensable. Tous ces essais et tentatives actuels devraient donc être soigneusement suivis par ceux qui s'intéressent à la pédagogie moderne des mathématiques.

Projet didactique.

Les résultats des recherches conduites aux frontières : mathématique -enseignement, histoire des mathématiques - enseignement, mathématique - psychologie de la pensée mathématique, psychologie - enseignement, sociologie -enseignement, etc. ne forment qu'une base pour les travaux méthodologiques visant à la préparation des projets didactiques concrets concernant la structure d'un fragment plus ou moins développé des mathématiques élémentaires, proposée à la réalisation scolaire.

Le caractère particulier de la révolution actuelle dans l'enseignement des mathématiques élémentaires s'exprime par le fait que beaucoup de projets semblables sont esquissés et propagés par des professeurs d'université. Les auteurs de ces projets d'ailleurs les traitent souvent comme "matière première" mathématique ou comme éléments préfabriqués seulement de cette matière, préparés pour la construction exigeant encore un travail mathématique plus détaillé du point de vue de l'enseignement. Ce double travail mathématique est indispensable, car la construction scientifique d'un fragment donné de la connaissance mathématique ne peut pas être et ne doit pas être totalement identifiée avec sa construction pédagogique.

La transformation de cette "matière première" en une structure adaptée aux conditions de l'enseignement, c'est la tâche particulièrement importante de la méthodologie actuelle de l'enseignement des mathématiques.

A ce stade, notre travail a le caractère d'une activité mathématique dirigée vers nos buts éducatifs, et basée sur notre conception de modernisation. On peut mentionner, à titre d'exemples, l'élaboration d'une axiomatique formant l'ossature du cours scolaire, la construction d'une définition particulièrement simple et opérative du point de vue de l'enseignement, une nouvelle démonstration ayant des valeurs particulièrement éducatives pour le développement de la pensée mathématique de l'élève, la mise en évidence de problèmes de genre moderne accessibles aux élèves d'un certain niveau, etc...

L'analyse des mathématiques mêmes peut devenir le point de départ de travaux pédagogiques très nécessaires ayant aussi le caractère frontalier. Il s'agit ici de l'enregistrement et de la comparaison analytique des solutions mathématiques différentes déjà connues du même problème, en vue de trouver la base scientifique optimum du point de vue de l'enseignement. On considère donc les différentes définitions d'une notion, les axiomatiques différentes mais équivalentes de la même théorie les démonstrations différentes d'un théorème, etc., et on fait un choix selon certains critères. Or l'élaboration de ces critères et leur application aux cas concrets ne peut pas se passer de la double vision mathématique et pédagogique. Ce travail ne peut donc être exécuté que par un mathématicien-pédagogue, ayant une expérience nécessaire de l'utilisation des méthodes mathématiques et disposant aussi d'une préparation suffisante à une analyse pédagogique du matériel mathématique.

La méthodologie des travaux de ce type se trouve encore in statu nascendi, mais elle se développe pas à pas. Evidemment les résultats de cette recherche sont encore peu connus, en raison de leur caractère partiel et restreint.

Recherche concernant le procédé pédagogique en classe.

Au centre de ce domaine, dont je viens de mentionner, à titre d'exemples, certains problèmes qui se révèlent à ses frontières, nous trouvons comme sujet de notre recherche le processus concret de l'enseignement, avec tous ses aspects concernant l'organisation en classe du travail individuel et en groupe, ainsi que les critères et les méthodes d'évaluation objective des résultats obtenus.

La modernisation des mathématiques scolaires nous a mis en face de beaucoup de problèmes ouverts et difficiles de ce genre. Parmi ces problèmes, se trouvent évidemment ceux qui existaient aussi dans l'enseignement de tous les temps mais qui étaient dissimulés par les habitudes rigides et les normes sacrées de la tradition. Pour en donner un exemple, on pourrait indiquer les critères et les méthodes d'évaluation des résultats de notre enseignement. Le professeur se trouvant jusqu'alors tout à fait compétent dans cette question, s'aperçoit maintenant dans la nouvelle situation, que cette évaluation est encore plus difficile qu'il ne le pensait. On se demande, par exemple, dans quel sens on peut parler de la "compréhension" chez un élève des notions ensemblistes ou de celle de l'axiomatique, quels en seraient les critères et par quels moyens on pourrait contrôler le degré de cette compréhension. On voit rapidement que de telles questions concernant l'enseignement traditionnel n'étaient qu'apparemment moins compliquées. De cette façon, la modernisation du contenu mathématique lui-même a apporté des vues nouvelles à la pédagogie sensu stricto et nous a éveillés de notre tranquillité et de notre bonne conscience pédagogique.

Mais, en dehors des problèmes existant aussi dans l'enseignement traditionnel, la modernisation du contenu et de l'esprit des mathématiques élémentaires pose des questions nouvelles. Evidemment, par exemple, les méthodes dites actives s'exprimant dans l'organisation se basent sur la recherche libre de l'élève, doivent être traitées comme un grand progrès dans la pédagogie moderne de l'enseignement. Mais plus le sujet d'étude est structuré a priori, moins il se prête à cette recherche libre. L'enseignement des mathématiques élémentaires organisé axiomatiquement peut courir donc le grand danger de mettre l'élève dans une voie trop étroite, se basant plus sur l'exposé du maître, que sur les méthodes de recherche active faite par les élèves eux-mêmes. Conscients que, d'un côté, l'introduction des élèves à la méthode axiomatique est une condition indispensable à leur compréhension du contenu mathématique même, et de l'autre, que c'est avant tout par l'activité et la recherche individuelle qu'on peut atteindre cette compréhension, nous faisons face à une question pédagogique extrêmement importante, mais aussi très

difficile.

Un autre exemple concerne les matériaux et les moyens utilisés en classe. La modernisation du contenu et de l'esprit des mathématiques élémentaires exige aussi une révision complète de ces moyens. Il suffit de mentionner une "nouvelle optique" dans le traitement du dessin, du modèle spatial, du film, etc. On voit mieux le rôle des matériaux polyvalents, si fortement souligné par C. Gattegno et P.Z. Dienes. Nous trouvons ici beaucoup de problèmes ouverts, qui n'ont pas même encore été abordés.

Tous ces travaux ne peuvent être faits que par le mathématicien lui-même ayant une préparation psychologique et pédagogique adequate. On essaie souvent d'isoler ces deux sortes de compétences. Mais , en ce qui concerne l'enseignement, ce serait un malentendu profond -peut-être encore plus profond dans les mathématiques modernisées que dans les mathématiques traditionnelles. Laisser les recherches concernant les méthodes et les moyens d'enseignement aux pédagogues purs et aux psychologues purs, ou à ceux ayant seulement une instruction mathématique superficiellement moderne, ce serait dangereux et même nocif, et on peut déjà donner des exemples concrets de mauvaise influence de travaux semblables.

Le développement révolutionnaire de la technique pose aussi à la recherche pédagogique dans l'enseignement des mathématiques des problèmes particuliers. La pédagogie de nos temps se trouve dans une situation presque paradoxale ; la technique offre des moyens nouveaux audiovisuels, télévision, machines à enseigner, et la recherche pédagogique de l'utilité, de la portée, de l'application, de la manière de se servir de ces moyens etc, est retardée. En conséquence, on n'exploite pas suffisamment ces moyens et, de plus, il arrive aussi qu'on les utilise d'une manière maladroite.

L'enseignement programmé des mathématiques peut servir d'exemple à un problème pédagogique exigeant une recherche particulièrement d'un groupe de spécialistes perspicaces. L'élaboration d'un programme pour l'étude des mathématiques doit être basée avant tout sur la connaissance profonde de la structure mathématique en question, sans laquelle la décomposition de la prise de conscience de cette structure en opérations fondamentales de la pensée ne pourrait pas être correcte. D'un autre côté, la construction du programme exige l'analyse psychopédagogique du processus de l'apprentissage dans une situation tout à fait nouvelle, car l'étude selon un programme préparé a priori diffère non seulement de la recherche libre individuelle du travail en groupe, mais aussi de l'étude basée sur la lecture du livre "ordinaire". La prépara-

tion sérieuse d'un programme concernant tous ces aspects purement mathématiques et psychopédagogiques mérite donc d'être considérée comme un travail scientifique comparable par exemple à celui d'un constructeur en technique. La vérification expérimentale de l'utilité et de l'efficacité du programme d'un côté et les problèmes techniques de l'autre, exigent d'autres méthodes de recherche.

Le problème si compliqué et si composé doit donc être l'objet du travail continu et systématique de groupes de spécialistes compétents en vue d'éviter le danger particulier, évident actuellement, des abus provenant de la réclame commerciale peu responsable, suggérant "les miracles de l'enseignement programmé". Les programmes présentés même dans les manuels modernes sont -malgré les apparences- opposés souvent à l'esprit mathématique, ainsi qu'à la pédagogie d'aujourd'hui. Pour la méthodologie des mathématiques, la question de l'enseignement programmé reste donc encore ouverte.

Méthodologie de l'enseignement des mathématiques comme discipline en devenir.

L'esquisse de la problématique -que je viens de faire- justifie à mon avis, la thèse concernant l'existence d'un domaine de la recherche qui ne peut être inclus totalement ni dans les mathématiques mêmes, ni dans la pédagogie sensu stricto. En liaison avec la situation analogue dans la linguistique moderne, le linguiste soviétique Dobruszyn écrit : "Les frontières entre les domaines de la connaissance surgissent indépendamment des définitions formelles de ces domaines et vice-versa les définitions changent avec les nouvelles frontières qui se révèlent de manière naturelle."/[1]

La naissance des disciplines "à la frontière" et le développement des recherches interdisciplinaires sont un des aspects caractéristiques du dynamisme de la culture contemporaine, dans laquelle les deux tentatives opposées, celle de la spécialisation et celle de la synthèse, ébranlent continuellement la classification rigide de la science.

La méthodologie de l'enseignement des mathématiques appartient justement à ces disciplines en devenir, dont le développement ébranle la traditionnelle classification de la recherche. La demande de lui assu-

---

1. R. Dobruszyn : "Matematyczne metody w linguistyce" Wiadomosci Matematyczne VI, 2, Warszawa, 1963, sh. 231.



rer la place adéquate dans l'ensemble d'études supérieures faites par son utilisateur principal, l'enseignement des mathématiques, mérite d'être pris en considération sérieuse.

On pourrait évidemment opposer à cette réclamation la réalité d'aujourd'hui : les difficultés de réunir la documentation nécessaire concernant les travaux déjà établis ou se trouvant en réalisation, le manque de revues spécialisées et de professeurs compétents, etc. Mais il faut rompre le "circulus vitiosus". Il faut commencer, même avec un certain risque concernant le niveau initial. Ce qui entrave le progrès dans ce domaine, c'est l'indifférence ou même le mépris des travaux de ce genre exprimé par certains scientifiques ayant une grande influence sur les jeunes. Le recrutement des jeunes licenciés en mathématiques pour la recherche objective en méthodologie moderne des mathématiques ne pourrait pas être effectif, si l'atmosphère dans la Faculté même continuait d'être celle d'aujourd'hui.

L'Etude de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques peut-elle être réduite à la préparation pratique au métier ?

A cette question, formulée au début de mes considérations, il faut donner, à mon avis, une réponse négative.

Si la théorie mathématique et pédagogique sans applications, sans répercussions pratiques à l'enseignement ne se présente que comme une construction vide pour un maître, sa préparation purement pratique au métier lui impose une attitude rigide et conservatrice, indépendamment de ses conceptions méthodologiques dites "traditionnelles" ou "modernes".

Le professeur n'ayant pas une formation théorique large mathématique, psychologique et pédagogique, ne perçoit pas de problèmes et n'a aucune imagination pédagogique. Il connaît une seule voie, un seul programme, une seule manière de le réaliser ; il n'a pas de doutes, il ne se pose pas de questions et ne cherche pas de réponses. Il ne veut pas comparer son enseignement avec l'enseignement des autres. Et on peut observer déjà que ce manque d'"imagination pédagogique" enchaîne aussi d'une manière dangereuse son "imagination mathématique" si nécessaire dans l'enseignement.

Les conséquences de cette attitude sont visibles aujourd'hui ; nous sommes témoins d'une crainte ressentie par beaucoup de professeurs, vis-à-vis des tendances nouvelles dans l'enseignement des mathématiques, d'une inquiétude de ne pas pouvoir s'adapter aux procédés nouveaux, souvent opposés à ceux de la tradition. Le maître qui était sûr de lui-même, se trouve maintenant perplexe, et cela s'exprime par une

"frustration" si dangereuse du point de vue du progrès dans l'éducation.

Il faudrait tirer, aussi vite que possible, des conclusions de cette leçon, car nous voyons ce danger renaissant comme un phénix : beaucoup de ceux qui ont commencé déjà à enseigner selon les programmes modernes ne sont pas moins rigides que leurs collègues "traditionnalistes". Ce qui est changé chez eux, c'est le contenu du sujet et sa présentation, mais pas l'attitude fermée à la discussion et à l'analyse objective des autres conceptions. Si cette attitude devait être conservée par la suite, ceux qui sont "modernistes aujourd'hui" entraveraient le progrès dans la pédagogie des mathématiques de demain. Nous avons déjà la conscience claire -étant donné le dynamisme du développement de la science et de la technique- que le maître de mathématiques se trouvera, à l'avenir, toujours dans des situations transitoires exigeant un effort créateur continu. Il doit donc être préparé aujourd'hui à la perspective de demain. Il doit être préparé à la révision permanente de la conception des mathématiques élémentaires, des programmes, des méthodes et des techniques pédagogiques. Il doit quitter l'université avec la compréhension profonde que ce manque de stabilité n'est pas un "malum necessarium" mais au contraire un caractère essentiel de l'activité humaine créatrice à laquelle personne ne peut échapper dans son métier, ni le professeur, ni le technicien, ni le médecin. Le pragmatisme -comme principe de la formation des maîtres- ne conduirait jamais à cette attitude, exigeant la conception ouverte du monde de la science, de la profession -conception qui au point de vue de l'enseignement mathématique, ne pourrait pas être élaborée sans l'étude théorique approfondie de tous ces domaines dont le croisement fait naître la méthodologie moderne des mathématiques.

Problème du programme de l'étude en méthodologie de l'enseignement des mathématiques.

Nos expériences nous permettent de suggérer les objectifs suivants:

Le programme de la méthodologie mettrait en évidence les problèmes de la pédagogie générale des mathématiques et ses problèmes particuliers.

L'étude générale concernerait :

1. L'analyse et la discussion multilatérales et profondes des problèmes de l'enseignement des mathématiques du point de vue de ses bases spécifiques et philosophiques mathématiques (contenu, structure, méthodologie de la recherche), logique, psychologique, pédagogi-

ques et sociologiques ;

2. le rôle et les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans le système actuel de l'éducation et dans la perspective de son développement ;

3. L'analyse du programme scolaire actuel, la perspective de ses transformations, l'étude comparative des programmes élaborés dans les autres pays à l'échelle internationale ;

4. l'organisation du processus de l'enseignement des mathématiques et ses techniques particulières ;

5. les méthodes de l'amélioration continue du travail professionnel, les éléments de la méthodologie de la recherche dans le domaine de l'enseignement des mathématiques.

En choisissant des problèmes particuliers, il faudrait prendre en considération avant tout :

1. les problèmes particulièrement importants du point de vue de la réalisation des objectifs de l'enseignement des mathématiques ;

2. les problèmes particulièrement difficiles concernant soit la structure mathématique du sujet en question et sa présentation élémentaire, soit les difficultés psychologiques, soit les difficultés dans l'organisation même du processus de l'enseignement, liées au thème donné ;

3. les problèmes nouveaux, inconnus dans les mathématiques élémentaires traditionnelles, exigeant la recherche profonde et très perspicace à l'étape de "la réforme en marche",

4. les problèmes particulièrement favorables à la présentation synthétique des tendances nouvelles et des illustrations des considérations générales ainsi qu'à l'initiation de l'étudiant au travail méthodologique créateur.

Le programme dont je viens d'esquisser les questions les plus importantes seulement peut être réalisé dans des formes différentes : nos expériences/[1] nous permettent de mettre en relief les formes suivantes: le travail individuel d'étudiants, basé sur la lecture ou sur la recherche méthodologique, soit théorique, soit expérimentale, les cours, les exer-

---

1. A l'Ecole Normale Supérieure de Cracovie.

cices, les séminaires, les stages. Pour donner un exemple de l'élaboration d'une question particulière au cours des travaux de ce genre, je peux citer l'étude du problème de l'enseignement de la logique au cours de l'enseignement des mathématiques, qui a été le sujet d'étude des étudiants à l'Ecole Normale Supérieure de Cracovie : le cours et le séminaire consacrés à l'analyse comparative mettent en relief les notions, les théorèmes, les méthodes de la logique mathématique, formant la base des mathématiques en général, et des mathématiques élémentaires en particulier ; le cours consacré aux problèmes psychologiques du développement de la pensée mathématique de l'élève ; la lecture comparative des manuels traditionnels et modernes utilisés dans les différents pays et l'analyse comparative des programmes à l'échelle internationale du point de vue de cette question ; l'étude comparative -aussi à l'échelle internationale des moyens intuitifs de la présentation du contenu logique (graphes, schémas différents), les sondages faits par les étudiants à l'école aux différents niveaux, en vue de révéler l'état actuel de "la logique en acte" chez les élèves, leurs difficultés et les fautes les plus obstinées et nocives ; les expériences faites par les étudiants à l'école, consacrées à l'initiation des élèves à la logique en acte et à son expression symbolique. Une étude semblable a été exécutée en ce qui concerne le problème de la méthode axiomatique dans l'enseignement. Au cours du Séminaire, durant deux semestres, a été faite une revue comparative de beaucoup d'axiomatiques différentes du point de vue des besoins de l'enseignement ; on a confronté les conceptions traditionnelles et modernes de l'axiomatique et leur application pédagogique ; on a organisé des sondages à l'école concernant la compréhension de la méthode axiomatique chez les élèves qui ont eu un enseignement traditionnel ; on a élaboré certains projets didactiques visant au traitement en classe de certaines axiomatiques modernes (y compris l'étape de l'axiomatisation) ; on a fait certains essais, à l'école, dans ce domaine, etc...

Le programme concret de l'étude méthodologique ainsi que sa réalisation dépend de l'ensemble des autres études faites par le futur professeur. Si ces études - ce qui a lieu encore dans beaucoup d'universités- ne sont pas organisées d'une manière unitaire et synthétique, c'est justement au cours de l'étude élémentaire unitaire au moyen des structures fondamentales.

Dans ces conditions, il arrive souvent que l'étudiant ne devienne conscient de la synthèse scientifique due à ces idées, que par la recherche méthodologique dont je viens de parler. De cette manière, l'étude méthodologique apporte une contribution de valeur même pour la connaissance mathématique du futur professeur.

D'autre part, si l'étude supérieure en mathématique étant organisée selon la conception moderne, s'enfonce dans un monde d'idées très générales et abstraites, nous pouvons observer un autre phénomène. L'étudiant même familiarisé avec des structures générales, ne trouve pas facilement de voies d'accès à leurs modèles concrets dans l'enseignement. Dans ce cas, une des contributions très importantes de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques consiste dans la concrétisation des idées abstraites, dans leur projection dans le monde des calculs, des opérations, des notions, des théorèmes plus particuliers, formant le contenu du cours élémentaire.

Le programme de la méthodologie de l'enseignement des mathématiques dépend aussi des autres sujets d'étude supérieure, par exemple si l'étudiant n'a pas eu la possibilité de suivre le cours d'histoire des mathématiques, certains renseignements dans ce domaine doivent trouver leur place adéquate dans l'étude méthodologique. Si, au contraire, le cours d'histoire des mathématiques est consacré justement au développement des grandes idées mathématiques d'aujourd'hui et à l'esquisse des perspectives de demain, la méthodologie de l'enseignement des mathématiques pourrait y trouver une de ses bases essentielles en simplifiant de même son programme d'étude.

La méthodologie de l'enseignement des mathématiques en tant que sujet d'étude supérieure des futurs professeurs devrait donc être toujours adaptée.

Ce qui devrait être demandé, c'est la formation du professeur conscient de la place de la recherche méthodologique, ayant la pensée ouverte aux problèmes qui se posent aujourd'hui et qui se poseront demain à l'enseignement des mathématiques, muni des connaissances de base et de moyens de travail dans ce domaine, préparé d'avance au développement rapide, aux changements continus de programmes, de méthodes et de techniques de l'enseignement. Une telle attitude peut être formée à la Faculté, en liaison étroite avec l'étude mathématique, dans l'atmosphère excitante de la recherche scientifique, et non en marge négligeable de cette étude. Il faut que le "futur professeur voie la possibilité de la création intellectuelle non seulement dans la grande science pure", mais aussi dans son propre métier.

Résumé of the article

METHODOLOGY OF THE TEACHING OF MATHEMATICS AT UNIVERSITIES AND HIGHER PEDAGOGICAL SCHOOLS

A. Z. Krygowska

I. The discussion concerned mathematical programmes at universities and other establishments of higher education at which a Master's degree is awarded which enables the holder to teach mathematics in the higher grades of an elementary school as well as in a secondary (high) school. The starting point of any discussion of the methodology of mathematics teaching must be a proper assessment of its position in the whole course of study. This in turn depends on the answer to the question as to whether methodology should be ragarded as an object of higher studies, or as a practical professional training which lies outside the scope of serious scientific study.

2. To answer the question one must first decide whether the specific features of the problem of methodology in the teaching of mathematics and the methods of research used constitute a distinct branch of science. The alternative would be to decide that a practical methodological training for the teaching profession is sufficient.

3. In the first part of the paper the author takes the view that the methodology of Mathematics teaching is a distinct branch of science in view of its particular problems and methods of research, although it is a border-line branch having points of contact with several of the great traditional sciences. Its evolution, though dynamic, is still in its initial stages. The point of view taken is justified by an analysis of the situation in present day research where activities of a similar character, at a corresponding stage of development, are considered as separate scientific disciplines. It is also justified by an analysis of current problems and methods of research into the teaching of Mathematics which give the subject its specific character.

4. In the second part of the paper the author claims that restricting the methodology merely to a practical professional training unaccompanied by a serious study of the theoretical principles of mathematics teaching is not only inadequate, but even detrimental to the progress of teaching.

This claim is justified by an analysis of

i) the part assigned to mathematics in contemporary civilization

ii) the new tasks facing teachers of Mathematics in elementary and secondary schools, and

iii) the need for a constant revision of syllabuses and methods of teaching in order to keep the schools in touch with the evolution of life and of science.

While the author does not deny the importance of practice, the necessity to maintain a proper relation between practice and theory in the methodological training of undergraduates is emphasized.

5. Admitting the points of view expressed above, we are led to the conclusion that methodology in the teaching of mathematics can and must be considered as one of the essential subjects in the preparation of graduates to teach mathematics in the higher grades of elementary schools and in secondary schools.

6. Taking account of the particular features in the methodology of mathematics teaching and of its current stage of development, the author gives the guiding principles for the construction and content of a programme in the methodology of teaching and its pedagogical realization.

SECTION II

ARTICLES ORIGINAUX ET REPRODUCTIONS

ORIGINAL ARTICLES AND REPRINTS

APPROXIMATE CALCULATION IN THE SECONDARY SCHOOL

Tibor Bakos

1. With the new curriculum of the secondary schools the basic principles to be followed in the teaching of approximate calculation at mathematics classes have also taken shape. It might be worthwhile to outline what is meant under approximate calculations : the performance of theoretically precise calculations with a simple assessment of error, to arrive at properly rounded approximate values of the quantities sought for, and establish the degree of approximation.

Under approximation, different processes are sometimes meant even in the secondary school - explicitely or implicitely. Regarding a long felled tree with its branches chopped off and sawn off perpendicularly at the two ends to a truncated cone by simplifying abstration, is an approximation. A further approximation is to take a cylinder of equal height with the log, whose basic radius is calculated according to some averaging from the mean radii of the end plates, to establish its cubic capacity. A less conscious approximation is the way we interpolate in our tables of functions with regard to the functions in the proximity of the respective point to be linear. /Selecting naturally the pace of the tabulation accordingly/. An approximation is furthermore to neglect the mass of a vessel and to consider only the mass of the water, in calorimetric measurements.

In all these examples the principle respectively the formula applied is erroneous to a smaller or greater extent but they do simplify calculations. We must teach our pupils how to differentiate between rough and fine approximation by referring time and again to the concessions and sacrifices on the one hand and the advantages eventually obtained on the other, by approximation.

Naturally we often set out what approximation means, in the above more restricted sense of the term. This is the more necessary - and from various aspects at that - because the official standpoint is that no theory should be taught in this sphere. This principle obviously aims at preventing that the problem of approximation should become a part of the syllabus, specifically meant for the practices of any one group on any one day of the week, which afterwards may even be forgotten. Approximation calculation should become an everyday occurence,

an auxiliary means in the evolution of the practical and rational concept of quantities. A means which make the pupils to pick up the knowledge in the course of observations and discussions and integrate it with the already acquired knowledge in their minds.

According to information, the main questions to be raised at the discussion will be as follows :

1. Starting out on data of given accuracy, what degree of accuracy may be expected in the results ?
2. To achieve a certain degree of accuracy in the result, what degree of accuracy must be ensured in the starting data ?
3. How can function tables be applied in the above work ?

In what follows, I should like to touch upon a few ideas.

The first problem had been dealt with in an earlier article in which I have an example for the examination of the product of factors of given accuracy. It should be stated right at the outset that the product will be highest / lowest / if the highest / lowest / assumable values of the factors are multiplied ; while the quotient will be highest / lowest / is the highest / lowest / value of the dividend with the highest / lowest / value of the divisor are divided.

After having derived concrete examples it was found that it is sufficient to compute the highest and lowest possible values of the product / quotient / or else to compute only one of the highest and lowest values of the result, taking the mean of the result to stand for the second, because in such a way fewer digits will figure in the calculation and it will be easier to establish the error limit.

Observations of this kind may also be compared : the error limit pertaining to the data may be varied ; it may be established what percentage of change the foundings might have caused to the individual data / relative error / and to the result.

We may set the error limit in percentage and from it calculate an error limit rounded and containing no more than two values for each, finally we may demonstrate that the relative error of the result is equal to the sum of the relative errors of the factors / resp. the dividend and the divisor/.

In view of the relatively high error limits, we are inclined to think that we have approximated the possible highest error. Therefore it will be interesting to prove that greater deviations are less frequent than slight ones.

Complex calculations can be divided into basic processes. In such events the error limit established for the earlier processes may be utilised for the error limits of the subsequent ones.

Here is a simple enough example : the calculation of the area of the square from a side, given in rounded value and with a great error limit. Here, however, the following problem arises : is the equality of the sides ensured or is their equality, too, only approximate - let alone its rectangularity ?

As to the error in taking and checking of logarithm, we must bear in mind that due to rounding, the table yields 0, 5378 for mantissa in all cases when the precise value falls between 0, 537 75 and 0, 537 85. The logarithm of the quotient of the figures pertaining to the terminal points of the interval is 0, 0001, viz. the quotient is 1, 000 23, the difference of the two numbers 0, 23 o/oo or half of it from the centre. Interpolating and rounding the increment once more, this may in an unfavourable case double the error - provided both roundings were in the same sense /we do not naturally know how the figures in the table had been rounded/.

The errors of calculations with logarithm occur due to such causes and observations with regard to the basic processes. For instance, in the logarithm of a two-factor product, the errors due to rounding add up again, if they are of the same sense. Simple and well known examples for the error sources are also that with a four-digit table 2, 3=5, 999 and 2^{10} = 10, 23, 3. The fifth digits may be written out only in the section between 1000 and 1100.

In trigonometric calculations we meet even the approximate values of angles : mostly basic operations and square-root extractions / sine and cosine theorems / are performed with their functions. In the observation of the errors the only new element is that with a higher error limit of the angle -it may exceed 1° / therefore it is advisable to assume - to 3° in observations with considerable deviation /, increasing or decreasing it between the given limits, the circular functions will not show the same variations ; the result of the calculation with mean data will show a larger deviation from the mean of the lowest and highest possible results, than in the case of the product.

The matter is more simple in calculations for right angled triangle, assuming the right angle to be perfect. Here we may state for once and for all that the variations of the acute angles / inter-related / will entail greater changes in the small right-angle side. We must not forget that around 90° the y = sin x function changes very slowly, therefore such angles can be had at a much higher error limit only, on ground of their sines. It is more advantageous to take the cosine -if at all possible -

which shows greatest changes just in this point / the sine changes considerable around 0°/.

3. The second main problem requires a treatement to the opposite. Let us see the following example :

In sloping terrain grown densely with brushwood, near a road, a rectangular plot of some 20 x 30 m must be marked out with an error not exceeding 2 per cent. Due to the bushes and trees, a small bend in the road and uneven terrain, in the set length of 30 m we put the error at 50 cm. What accuracy must we aim at in determining the width of the plot ?. The relative error limit of the area will equal the sum of the relative error limits of length and width. The first being 5/3 per cent, 1/3 per cent is left for the latter. Thus, in setting the width of some 20 m, the error we commit must not exceed 6 cm.

However, seen from the point of view of the first condition, the solution is not unambiguous. With a smaller error in length, a larger one may be permissible in width. It may again happen that the question is insoluble ; if for instance the 50 cm error would encumber the 20 m side which in itself is 2, 5 per cent, even an absolutely accurate determination of the other side could not reduce the error of the area to below 2, 5 per cent. In the given case it is always the measure / section / causing more difficulty which must be determined first.

As in all reversed tasks, here too much more complicated cases may also be met. To mention but one : let us determine / with a minimum of computation / the value of the roots of the

$$\sqrt{2X^2} + \sqrt{17X} - \sqrt{6} = 0$$

equation, rounded down to three decimals.

4. The tables may be regarded to be data of an accuracy which is beyond our influence. However, we must discuss their accuracy. We must make the pupils understand that an accuracy of four digits - which our tabulations afford - meets almost all needs and is sometimes even more than is required. Such accuracy in the order of metres gives error limits around millimetres, if kilogrammes are concerned, it gives grammes ; in an average, one thousandth of the value.

If tables are used and simultaneously error limits are determined, this should be taken into view, theoretically. In the examples, however, it is advisable to assume greater errors than that. So great in fact as to make the error in the table negligible in comparison. We must state, however, that the tables should not be used in computations of seconds accuracy. The about 0, 01° accuracy achievable in certain parts of the

table is very high, it amounts to some 0, 00 02 radian, viz. the vision angle of a 2 cm diameter button from a distance of 100 m - but the 0, 01° is still in the order of minutes / seconds accuraries should be altogether ousted from school teaching since pupils do not hear for instance of millimicrons unless when speaking of quantities which are measured by milli-microns/.

The teacher, at least, should know that the sine and tangent tables of the school function tables are not consistent. Above 45° the tangent table reduces the number of decimals because integrals tend to arise ; the total of figures is always four. Accordingly, below 6° the fifth, below 0, 6° the sixth decimal should be written out because here not a value but a substituting 0 stands behind the decimal point. We must also know that the appropriate parts of the lg sine and lg tangent tables give the accurate values ; for instance sine 0, 1° from the sine table is 0, 0017 while lg sin 0, 1 = 7, 2419 - 10 ;

sine 0, 1 is 0, 001 745.

In the dense sine-tangent table inter-polation below 5° is safer ; these finesses are not being indicated nowadays. This is easy to understand, because we lack the necessary concepts for approximation. Thus if we attach some explanation to the less accurate parts of the sine and tangent tables, they may be adequate for approximations.

Thinking in perspective, I think that the tables, even with a more extensive use of the slide rule, will not become superfluous, at least not in the rudimentary stages. The slide-rule, namely, gives readings of numerical data only after appropriate setting. Until the necessary practice has been acquired, the pupils need the tables for help and check as a crutch as it were.

5. In conclusion : let us make the calculations of error limits interesting, alive, variegated and enlightening. Never a burden. Let us point out all circumstances that may cause measurement - and other errors / see the example of the brushwood-grown area / and think of ways and means to reduce and overcome difficulties. More abstract examples may also be given, as for instance the distribution of errors. Approximate calculation will become alive by giving a realistic assessment of the error in a simple manner and fast.

Résumé de l'article

CALCUL APPROCHE A L'ECOLE SECONDAIRE

Tibor Bakos

L'auteur définit d'abord le calcul approché comme étant "l'exécution de calculs théoriquement précis avec une évaluation simple d'erreur, pour parvenir à des valeurs approchées correctement arrondies des quantités recherchées, et établir le degré d'approximation".

Après avoir donné quelques exemples de calculs approchés, conscients ou non, couramment pratiqués (assimilation d'une bûche à un cylindre), il insiste sur la nécessité d'une part d'en montrer le rôle simplificateur, mais provoquant un résultat plus ou moins erroné, d'autre part d'en faire un auxiliaire à l'amélioration des connaissances de l'élève et non une matière à part.

Trois questions importantes se posent :

1. A partir de données d'une certaine précision, quel degré de précision attendre des résultats ?

L'auteur renvoie à un article précédent dans lequel il décrit, à partir de l'exemple du produit et quotient de deux nombres donnés avec une certaine précision, la manière d'expliquer à l'élève les procédés du calcul approché, au sens donné dans sa définition.

Il montre également comment décrire les limites des tables de logarithme ainsi que celles des tables des fonctions circulaires.

2. Cherchant une certaine précision sur un résultat, quel degré de précision doit-on avoir sur les données ?

C'est le problème inverse du précédent ; un exemple simple permet de montrer que ce problème n'est pas toujours soluble.

3. Comment utiliser les tables dans les calculs ?

Les tables ont souvent une précision, qui est une donnée imposée, nettement supérieure à celle des calculs ; les erreurs de celles-ci n'interviennent donc pratiquement pas ; par suite il faut éviter d'utiliser les tables des secondes d'arcs avant que la précision des calculs le nécessite ; l'auteur souligne enfin quelques illogismes des tables des fonctions

circulaires de l'école secondaire, et conseille une utilisation importante mais raisonnée des règles à calculs (erreurs dues aux manipulations de la règle et contrôle au début des résultats par les tables).

L'auteur conclut en pensant que les calculs d'erreurs doivent être un moyen vivant et rapide pour réduire et venir à bout des difficultés ; jamais une charge.

THE PUPILS' ACTIVITY IN CURRENT MATHEMATICS TEACHING

Andor Cser

Our instructions have for long set the requirement that during mathematics lessons the whole group should join in, the pupils should be made to take part in the digestion of the new material, the interest and active participation of the pupils should be ensured, etc. The directives issued by the Ministry of Education in 1959 with regard to the teaching of special subjects, in setting forth the aims of mathematics teaching, urge that the basic teaching material should be worked up in cooperation with the pupils.

These criteria, in certain respects, have already been implemented in modern teaching practice. In general, the method in which the only way to transmit new knowledge had been its presentation by the teacher and the sole task of the pupils attentively to listen, was abolished. Generally, the method, has become predominant that the communications of the teacher are combined with active work on the part of the pupils. The teacher's communications are interrupted by questions to which the pupils have to reply, and the pupils themselves have to refresh previous material, to identify characteristic traits in new notions, seek for interrelations, find out how far the new theorems are valid, find applications for them, etc. Many teachers try to avoid communicating the material and induce the pupils to form the new knowledge, while he helps them in this activity by aimed questions. Other teachers, again, present the material and put questions ; they let the pupils repeat what they heard, etc. But does this mean that we have been able to ensure the maximum and optimal participation of the pupils in the process of acquiring new knowledge ?

On the one hand we have to admit that such methods of keeping the pupils active during the lessons which we now see practiced, are a definite improvement over the former, exclusively communicating, method. They have done away with the possibility for the pupils to sit back in complete inaction or engage themselves with other things or else let the teacher have but a pretense of attention, after the teacher had finished orals and closed his notebook. Today pupils have to follow the whole lesson with attention and attempts, from time to time, to

report on their thoughts so as to prove their ability to think and help the collective work of their class in one or another period of the lesson.

On the other hand, if we study this practice with attention, we find signs which tend to show that the pupils' active participation in the acquisition of knowledge is just a semblance and our own experiences, too, prove that the improvement of the results is not convincing. It will be conspicuous that the "active core" which is really capable of promoting the work of the class, is only a small minority while the major part, even though its members may cooperate, have no considerable share in the progress. The knowledge they acquire at school is also deficient. It will be noted that what the pupils contribute to collective work, is always the obvious - and still, they catch a considerable part of the lesson - while the actual problem or the essence of, and key to, the problem in hand is being got over with quickly - and mostly with the help and cooperation of both the teacher and the talented pupils. The lessons have no pronounced parts, the pupils do not realize when they arrive to the decisive points of the material they are expected to grasp. The whole lesson goes by with questions put and replies given, without peaks of interest.

The pupils do not learn how to follow up a problem if left by themselves, and lean on the crutches of incessant questioning. A characteristic "mathematics class" atmosphere evolves in which, although the pupils work well - at least by appearances - and master each problem that may emerge with the active participation of the collective, once left to their own resources, they prove uncapable of overcoming even simple problems.

Such criticism, which naturally does not apply to all teachers, should not mean that the old method of the communication of material free from the interruptions of "incidents" was superior to keeping the whole group alert and engaged. It means only that the new method has not as yet been carried into practice in a faultless way and that when involving the pupils in the process of the acquisition of knowledge, we often rest content with half-solutions or illusory solutions. The stimulation, exploitation and activation of the pupils' attention is not an end in itself only an indispensable aid in teaching mathematics. More than that : a means to achieving the set educational aim. Our task is thus to see the faults so as to remedy them and make general use of the processes that prove most successful.

The pupils' activity in the acquisition of new knowledge during classes.

The learning of mathematics has its roots in reality ; it stems from the observation of actual relationships and situations, the general-

isation of manually performed computations, measurements, constructions and processes. School teaching frequently applies this method also in the process of individual learning.

In one school a teacher had the pupils make a cube of edge "a" and one of edge "b", three prisms having edges "a, b, and b" and finally three prisms of edges "a, a, and b". From these bodies they assembled a cube having edges "a + b". It was in this way that the teacher demonstrated the identity of the cubes of two members. Although there was a suitable drawing in the textbook to prove this, it may be rightly supposed that the relationship proved by the pupils' own manual work would provide for a more stable basis for the persistence of the knowledge, much better in fact than a mere inspection of the drawing which enables less intensive observation of the drawing which enables less intensive observation. In other schools, the pupils are regularly made to model in cardboard and skewers etc. to illustrate straights, figures in plane and space, whereby, alongside with the uniplanar blackboard drawings, these models in the pupils' hands help them to grasp spatial interrelations. In other schools, again, the pupils with tape measure and goniometric means set out areas or measure elevations in open terrain, etc. /The curricula, too, prescribe measurements in open terrain/.

The manual activity of the pupils for more intensive acquisition of knowledge is, however, only infrequently resorted to and rather occasional. A class, before graduation, illustrated their written test in Analytical Geometry with drawings taken from an optional angle, thus depriving themselves of the possibility of an approximate control. This, and in my opinion, other factors too, had a share in that only one or two of them were able to solve their problem. But I have nowhere met planned material in the curricula for measurements, accurate constructions, modelling - in general for manual activity to accompany the theoretical work. Works as for instance Ferenc Karteszi's " The Geometry of the Scissors" are few and far between in our literature. I have seen pupils who had never "seen" a square metre and had not the faintest idea of the magnitude of a hectare. One of the many reasons for the long uncertainty in the basic units of measurement is that our pupils carry out too few measurements.

Under activity not only manual work is meant. The striving of the pupil to keep pace with the intellectual development of his class is also activity. Such striving cannot evolve unless the pupil is aware of this development, respectively unless he knows about his group's intellectual progress in mathematics. To the question why he finds mathematics difficult, a pupil answered that "... the explanation is difficult to follow because the teacher talks a lot but he never tells us what to do" /third

grade of grammar school/. Obviously the only thing this pupil expects from his teacher is instructions in the form : If you must solve a problem of this kind, do this and that". Many pupils think like this. If there are rules, formulas, summaries taught, they do their best to commit them to memory but the mental processes that lead up to them he finds indifferent. Mental indolence tends towards formalism, a shirking the work of thinking. These pupils are not aware of the fact that one of the chief aims of mathematics teaching is to show the pupils how to think, they are unaware of the strides the better half of their class is making intellectually and in the aptitude of thinking and they have no intention whatsoever to catch up. The prerequisite for intellectual activity is to arouse the pupils' interest in thinking, to make them fond of it, to make them interested in solving problems.

An important sphere of thinking is the building of notions. Without clear and precise concepts and notions no man can think correctly, let alone solve problems. Still, there is much vagueness about concept building in the comprehensive schools. We often hear definitions without genus proximum : "A rectangle is the one whose opposite sides are equal". Definitions sometimes abound in characteristics : "The square is a plane figure having four sides and four angles". Or, idem per idems " The highest common factor is the highest of the common factors", or "Two quantities are proportional if with the growing of the one, the other too grows proportionately". We could cite many more similar faulty definitions given at classes.

Uncertainty in definitions is one for the reasons why the active cooperation of the pupils in concept building is relatively less than in drawing conclusions. The teacher is wont to involve the pupils in the work of concept building much less than he does in demonstration. We often hear the erroneous statement that it is enough to "give the definitions ready-made, from "outside" as it were, and rely only on the pupils' receptivity."

In the course of concept building we have ample opportunity to involve the pupils in creative work. After having demonstrated the idea behind a concept it might be useful to let the pupils seek for interindependent traits which are generally characteristic. This will teach them analysis and generalisation and how to differentiate between individual properties and general characteristics. From the characteristic features the genus proximum may then be composed - which again teaches the pupils systhesis. Giving the definitions ready made, the teacher forgoes the possibility to teach his pupils these fundamentally important thinking processes. If he gives them precise and professional definitions which to the pupils' ears sound alien and unusually terse,

he deprives them of the opportunity of mastering the difficulties of wording and expression.

If the teacher's questions aim at no more than refreshing some memorised material prompting obvious replies / for such there are no examples in our minutes / or if the teacher gives the answer himself, the teaching process should be called the apparent activation of the pupils. In activating the pupils the teacher's questions have a great importance. It is not enough to put the question. The questions must be to the point and fit into the thinking process ; trivial questions are superfluous. In practice we often see the opposite : many superfluous questions being raised while the essence gets lost.

Sometimes quite inadvertantly, by spontaneous observations, the pupils themselves let the teacher glimpse into their minds or weaknesses, giving him an opportunity to adapt himself to their way of thinking and taking advantage of it, lead them on to the truth, starting from there. This provides for the most natural method to activate the pupil and the teacher does well to encourage such remarks.

Another important domain of thinking is the understanding of proved statements, or theorems. To ensure the continuity of culture from one generation to the next, the handing down of the cultural treasures to the succeeding generations, is the task of the school. The cultural wealth of mathematics are the theorems and their teaching and transfer is the duty of the mathematics teacher. The term "transfer" implies that the teacher the person who transfers, has supreme significance in the process. The teacher, in the process of transfer leads the pupil on towards new truths and the pupil follows him. We feel inclined to state all this to avoid certain exaggerations of the heuristic method and avoid the interpretation of the principle of the activation of the pupils as one in which the teacher must not communicate anything and the pupils have to guess. The pupils have to understand the demonstration of many a theorem with outside help before they are able to demonstrate easy theses themselves. Mathematics as a subject is such that the new knowledge is mostly too difficult for the pupils to understand. Thus when we speak of the grasping of theorems, it is not the activity of the pupils but rather the correct communications of the teacher we have in mind.

In spite of all this, with due care and moderation, the pupils can and may be involved in the process of the transfer of knowledge without setting too stringent criteria. According to experience, there are certain stages in the understanding of a theorem in which the pupil's activity may get a share. These I shall enumerabe below, with the observation

however, that in the classes where I had been present, these had not been taken full advantage of. Neither did they occur in the sequence as given here.

a) The first stage is the presentation of the problem which the pupils are to learn, giving an idea of its importance so as to stimulate the pupils' interest. In exposing the new problem - whether derived directly from practice or emerging through the inherent logics of the subject - the teacher may rely on previous knowledge or on the ingenuity of the pupils. This helps the approach to the problem.

It is often surprising how many remarks pupils make sometimes in connection with the exposition of a problem. It would be a pity indeed to fail to avail ourselves of this opportunity.

b) After having outlined the problem the teacher should convince himself that the pupils had really grasped it ; whether they had understood the given conditions / data, relationships / and what the problem actually consists of / what quantity or relationship is sought for/. If the pupil cites the problem by rote, understanding may be apparent only. This, however, comes to light with the first sounding questions put by the teacher.

This stage has also some paedagogical effect ; it makes the pupils accustomed no sooner to start solving a problem than they had first thoroughly oriented themselves as to its essence.

A detailed discussion on, analysis of and contribution to, the problem make the pupils think. They get the knack of handling singlehanded a similar problem later on.

c) The teacher proceeds going through all mental processes which lead to the solution, to demonstrate his statement. In the course of this stage, we generally see the teacher's endeavour to mobilise his pupils' activity, to let them make suggestions towards the solution, recall previous knowledge and make them recognise - through illustration or inductive questions relationships which lead to the new knowledge, etc. These efforts may be characterised by "the teacher relying on his pupils' activity in the details of the exposition of the problem".

We may call the pupils' activity apparent if the teacher's questions are trivial and do not require any appreciable mental work. The teacher often uses extraneous relationships to arrive at the correct answer, for instance, putting questions like "What was it we learned last ?" or calling the theorem by its name "Well, what is Pythagoras' theorem ?" or imply to the difficulty by the question : "How do we multiply by ten ? How many places must we shift the decimal point to the right-hand side?"

While such questions would seem to solicit active cooperation, they actually do very little to make the pupils think.

The activation of the pupils through engaging them in the details of the raising of problems cannot be called useful in the training of youths to think unless the details are essential and such as are apt to make the pupils use their minds, and not trivialities which might keep the attention busy but never the mind.

Noted should be that the true activation of the pupils in the raising of problems needs additional time.

d) The examination into eventual restrictions to its validity, to how far it is true, applicable, how far it can be interpreted, also forms part of the demonstration and understanding of a theorem. It strengthens imagination and renders the pupil able to see the shapes and their variations in his mind's eye, it enables him to refresh and apply previous knowledge ; it boosts his independence etc.

Discussions during classes are but occasional. They are sometimes hasty or omitted altogether. They generally take place at the end of the long train of thought which exhausted teacher as well as pupil, anyway. Often there is no time at all left for discussion. The time is off and the teacher reassures himself by leaving the discussion by way of house-work. This, naturally, is but a self-delusion, a pious fraud ; these exercises are seldom recitation and this the pupils know full well. /in this respect discussions come to the same fate as numerical computa - tions. / Often it escapes the attention of the teacher that deliberations need some discussion for support. In connection with constructions, discussions sometimes come about because some of the randomly assumed data prove unsuitable.

The neglection of discussions is akin to a shift to the line of least resistance and formalism. A formalist is satisfied when the stages of a derivation are formally correct and consider the rest to be unnecess ary fussiness. But in teaching how to think, to determine the sphere of validity is of paramount importance.

e) To show how to apply the new material is the last stage of imparting knowledge. The direct aim in imparting knowledge is application : we endeavour to provide the pupils with applicable and well utilisable knowledge. Application following the imparting of knowledge has more than one important roles to play. Application may help the teacher find out whether he succeeded in transferring the knowledge, whether the pupils had digested the new material. However, from the mere fact that the pupils had understood it, it does not necessarily follow that they are also able to apply it. Application, too, must be taught. Ways

and means must be demonstrated, the pupils must be made acquainted with and able to recognize, the applicability of their new knowledge, even in problems of different nature.

Finally, the pupils may find pleasure in recognising the efficiency of their newly acquired knowledge or try their hands at solving problems using it.

The pupils' activity at practices.

In what went before, we spoke of the activity of the pupils in various stages of acquiring knowledge, of the forms of its manifestations and -more infrequently - of their motives.

The situation during practices is completely different. In imparting new knowledge, we stop from time to time to help the material sink in, to let one group of knowledge settle in the pupils' minds, to build out interrelations, to set more variegated and complicated problems whose solution needs knowledges stemming from different sources, to develop skill in applications and let the pupil, after more abstract treatment, see also the practical demand. In practices, therefore, the pupils' acquired knowledge must act. The pupil must get to know what his knowledge is worth, how it can be utilised ; whether he can use it at all ? From this it follows that during practices the first person is the pupil and the teacher is relegated to the background as his accompaniment and helper.

Summing up : from the point of view of the pupils' activity our practices - as they are performer now - show rather negative results. They fall short of their aim and serve rather repetition than practice. Results testify to the lack of efficiency in the guidance of practices.

The pupils' activity in repetition.

Repetition, systematic orals, are regarded by educators as motives for regular, continuous learning. The pupils are stimulated to learn because they know that they may be asked to report at any moment. Therefore, they try to keep pace with their class' development. Repetition, however, is not an end in itself but a means to enhance the pupils' activity and through it, to improve results.
Repetition - no doubt, has a significant role - although not an all-positive one - in the activity of the pupils. It may boost it and it may again break it in two. The effect of repetition on the pupils' activity greatly depends on the personality of the teacher.

In the relationship between activity and repetition we have to reckon first of all with the subjective factor on which depends its activity-

motivating significance.

Another problem of repetition is that we are prone to expect the pupil to apply his new knowledge right away, and immediately at such a degree of skill which, in accordance with the laws of psychology, an average pupil will achieve only after considerable practice.

It is correct to make the pupil learn and commit to memory the new concepts immediately, and we do well to convince ourselves of its results What we should abstain from, however, is to give marks without giving him a period of grace. It may affect the pupils' activity if the criteria set by the teacher during the schoolyear exceed his capabilities.

The pupils' homework.

In the sphere of the pupils' activity I see two main junctures : practices and homework. With regard to the latter, we may pose the question : is it absolutely necessary that the pupils should be kept engaged in mathematics at home too ? We often hear the serious warning passed from biological consideration, that due to excessive homework the daily work pupils are called upon to accomplish may amount to or even exceed eight hours, the working shift of adults. This must not be permitted and we have to strive to finish the bulk of work at school. All that is humanly possible, should be taught at school, in the classes. This criterion is supported also by the fact that the homes do not always afford facilities for quiet study. Would it not be possible - particularly in mathematics which with good teaching work can be made understood during the classes and in which the memorized knowledge is not predominant as for instance in history, geography and languages - to abstain from putting additional load on the pupils by homework ?

This medal, however, has also a reverse side to it. No successful mathematics teaching is conceivable without homework. It would be erroneous to say that mathematics teaching does not rely on the memory. On the contrary, to build up new concepts and relationships, concepts and relationships solidly committed to memory, are indispensable. Without a memorized material the teacher would have to define anew all previous concepts and teach all theorems over again. Things to this effect often occur in mathematics classes. The teacher, as a rule, : recalls previous knowledge if he comes across such in imparting the new one. But it is one thing to refresh something and another thing to re-teach it. We can recall only things which had already struck root in the mind and to commit something to memory we must have the thing in mind time and time again. That is why the pupil is often made to refresh the mathematics knowledge he had heard at school. Those who,

correctly, state that mathematics must never be learned by rote do not say that the pupils should not even glance at their textbooks and notes at home. What they imply is that mathematics must be acquired in the most appropriate manner. Let the pupil weigh carefully what had been said in class and recall : what had been determined and in what manner ; what relationships had been revealed ? through what conclusions had they been revealed ? through what conclusions had they been arrived at ? Had he grasped the conclusions drawn in all details ? are there still more details awaiting elucidation ? could he not himself reconstruct some vaguer details ? could he not use his textbook to help ? is there some previous material which he could find in the book ? and should he come across difficulties he cannot overcome, he had better jot them down and ask his teacher for explanation. These should be the stages of homework in mathematics. They would help the knowledge heard at school get roots in the memory. They would warrant for the pupils' good performance at the next class.

All this, however is not enough. The more difficult part of the homework is still to be done. Let us assume that the pupil, already at school, had learned a number of applications for his new knowledge and had fully understood how to utilise it. Now it remains to be seen whether or not he can apply it independently, generally in the example or examples given him as homework. If he fails, he must return to the new material, deliberate on it once more, collating it with the problem he is to solve. Are there conditions in the problem which apply to the new material ? would it help to go once more through the derivation followed in the example given in his textbook? etc. If he succeeds he may look forward with confidence to meeting further problems and applications.

In what way can the two sides of the medal be reconciled ? no doubt, in a way to prevent exaggerations in either direction. To waive homework altogether would jeopardize the aims of mathematics teaching. On the other hand, consideration must be given to the pupils' health. Therefore, the length and difficulties of homework must be carefully scrutinized - and this is the duty of the teacher. The teacher in the first place should do his utmost to impart the material at school. It is not enough to communicate the new knowledge, it must be understood and digested. Sufficient time must be righted forthwith, so as to avoid that the pupils should come up against unsurmountable difficulties. If this requirement is satisfied, the first part of the homework, the refreshing of the material imparted at school, will cause no difficulties. The teacher, furthermore, must not set his pupils problems for homework unless he had taught by examples how to apply the new material or unless he thoroughly discussed with the

pupils the eventual pitfalls of the problem. Should this too be fulfilled, the second part of the homework, the solution of the problems, will neither be a burden.

The pupils seem to lack sufficient advice as how to learn mathematics. The only definite instruction they are given concerns the homework, which is marked out in the book. In some schools, particularly in the comprehensive schools, the difficulties of the homework may be touched upon and from it the pupils may infer that they have nothing to do at home but solve the examples. As a consequence, some pupils in fact do nothing but see to their homework.

Haphazard selection of the examples may be another reason for the inefficiency of homeworks. The teacher may pick out examples at random / without checking whether some unsoluble problem might crop up in them /. In some instances, the examples prove to be faulty. I witnessed a case when the pupils for instance recognised their homework in the example they were given at practices. The teacher replied quietely : "Never mind, at least you will be able to solve it". Such occurances are by no means frequent. They are sporadic but they eloquently prove that not every teacher feels it his bounded duty to plan the pupils' homework with care and attention.

The statements made above about the pupils' activity, referred mainly to those pupils who are weak, middling or not too keen in mathematics. But let us speak also of the pupils who are talented in mathematics, of this by far smaller group whose representatives can be found almost in all classes, of those who love and understand mathematics, of this by far smaller group whose representatives can be found almost in all classes, of those who love and understand mathematics, who are active both at school and at home.

This survey was not written for their sake ; the problems treated here are not their problems. They have no difficulties and cannot understand why others consider mathematics a difficult subject. They are the solace of the teacher, making them feel that their work had not been in vain. However, this is reassurance in our modern society which needs people whose general education extends also to mathematics. Our society cannot put up with curricula drawn up for only a small active core because only they are able to meet the criteria, or to have textbooks written for but that small active core because only they understand them. It cannot let teaching go essentially to this small active core only, because it is they who take a share at classes, it is they who contribute to the mutual work of class and teacher ; and it is they who inspire the feeling that the "class" grasped what had been taught to them.

Résumé de l'article :

LA PARTICIPATION DES ELEVES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Andor Cser

L'auteur souligne que de nombreux efforts ont été tentés en vue d'une participation active des élèves en forçant leur attention , développant leur initiative personnelle et leur esprit d'équipe ; les essais se sont souvent révélés décevants ; l'ancien système des cours dogmatiques n'est pas meilleur. Il faut au contraire expérimenter des méthodes pédagogiques différentes.

La participation des élèves à l'acquisition de nouvelles connaissances en classe.

Après avoir donné quelques conseils pratiques (nécessité de travaux manuels, de concepts de base clairs et précis, etc) l'auteur s'attache au processus de la démonstration d'un théorème de façon à assurer sa parfaite assimilation par les élèves.

Activités des élèves en travaux pratiques.

L'élève doit apprendre à utiliser le savoir acquis au cours, à en connaître la portée.

Activités des élèves par les interrogations.

Les élèves sont stimulés par la peur d'être interrogés à tout moment; ils doivent être aptes à faire des applications directes et immédiates de leurs connaissances.

Le travail chez soi.

Le savoir en mathématiques étant plus le fruit de l'intelligence que de la mémoire, l'auteur pense que le travail à la maison devrait se limiter à retracer les démonstrations faites en classe et appliquer les résultats à des exemples.

Toutes ces constatations concernent les élèves dont le niveau en mathématiques est moyen ou faible. Contrairement à la pratique courante c'est d'abord à eux que doit s'adresser l'enseignement.

TEACHING ALGEBRA AND ANALYSIS IN THE SECONDARY SCHOOL

H.F. Fehr

The reform of mathematical education in Europe and the United States of America has now reached a point calling for review and evaluation of the new programa. These new programs have stressed the structural aspects of the several branches of mathematics by introducing basic concepts in contemporary language, developing theorems through logical deductions in a stated system of axioms, and are in general devoid of applications to other fields of study. Because of the last circumstance, the programs have been labelled as aimless or without purpose for the general education of secondary school pupils. To what extent this accusation is true is difficult to determine, but certainly as we look at the culmination of mathematical study at the secondary school level - that is the teaching of real algebra and analysis we should set certain worthwhile goals of achievement.

This paper is concerned with the last two or three years of study in the secondary school, corresponding to the tenth to twelfth school years. It refers to the second level of the lycee, the Oberschule of the German Gymnasium, the Gymnas of the Nordic Countries, or the senior high school of the United States of America. It treats the material that would be studied in the scientific line, those university bound students who are capable and desire to extend their earlier mathematical study.

Purpose.

Mathematicians are oriented to think of mathematics rather than of human beings as they create a program. It is easy for mathematicians to think only in terms of the mathematical knowledge they desire pupils to acquire as preparation for their courses at the university - rather than in philosophical terms of the role of mathematical knowledge in human affairs. This is not to say that such considerations might change their interest in mathematics *per se,* but it is said to focus the attention of the reader on objectives of mathematical study that may or may not sustain the mathematicians point of view. To this end there is offered the following purposes :

1. Mathematical knowledge, including the study of the Calculus (Analysis) is a necessary component in the formation of a liberally educated person. Down through the ages mathematics has played an important role in just this sense and today it has greater potential than ever for contributing to liberal education. But if the educated man must not be left a hundred years behind in his knowledge and conceptualization of the subject, then we are under obligation to eliminate outmoded and unimportant parts of the classical treatment and to replace them with more recent, more general, and more powerful concepts.

2. The usefulness of mathematics in practical matters has been the important factor in its vitality as a school subject. The rise of modern science, and the concomitant creation of a technological society compel us to give increasing weight to utilitarian demands for the more intensive teaching of mathematics. The program should be reflecting this goal through the teaching of application of a modern kind in both the physical and the social sciences.

3. The great purpose of all school education is to equip students with those skills and intellectual attitudes that permits them to go on learning throughout their lives. We must equip our students with that basic mathematics that will expedite their subsequent learning in the subject. The developments of mathematical research has completely changed the University and Graduate study of the subject from that which occurred 30 to 40 years ago. Hence the algebra and analysis taught in the secondary school must reflect the contemporary language, symbolism, and conceptualization basic to the successful study of university mathematics.

Pre-Requisites.

In the past history of mathematics teaching, review of previous learning occupied a considerable part of each year's study. In large measure this was necessitated by a psychology and philosopjy of teaching which emphasized rote repetition and ignored structured learning based on the acquisition of meaningful concepts. While the teaching still uses rote learning to a large extent, there is a gradual shift to psychological structuring of knowledge through scientific inquiry that promises a more rational and more retentive knowledge on the part of lower school graduates.

For students entering the senior school we can expect as pre-requisite knowledge, a good deal of information and manipulative skill in arithmetic and elementary algebra, as well as an intuitive understanding of fundamental mathematical ideas. In arithmetic each student should have acquired a meaningful computational development of the whole numbers, the positive fractions, and the rational number system, as well as an

introduction to irrational numbers. In algebra, he should have naive and correct use of sets and set operations, mappings, relations, and functions, and the corresponding manipulations with expressions (polynomials, and rationals) and the solutions of equations and inequations. Certainly the student should have had extensive work in coordinates and graphical representation.

In geometry the students should have completed a fairly comprehensive axiomatic development of Euclidean geometry of two and three dimensions. This implies an understanding of proof, axiomatic structure, deductive logic, and the use of logical connectives. The algebra should have been related to Euclidean space by the use of coordinate (analytic) geometry and the use of simple vector methods. The trigonometric functions of an acute angle, especially sine, cosine, and tangent, either through the use of ratios or as ordered pairs of numbers (θ, s) is a desirable pre-requisite to the study of real trigonometric functions. For any extension of this pre-requisite knowledge the reader is referred to the bibliography (3), (4) and (5), appended to this article.

<u>The Mathematics to be taught.</u>

The Algebra and Analysis in the senior school will be an extension of the pre-requisite study through a deeper, wider and more complex development. It will develop the great mathematical structures on which the university study is built. The syllabus briefly will be :

1. <u>Number Systems.</u> A fairly rigorous set-theoretical development of the Cardinal Numbers, the positive and negative integers and zero, and the rational numbers. The real numbers may be developed with less rigor through the use of infinite decimals and postulates of order. A Dedekind cut or similar rigorous development can be delayed to University study. The complex numbers, as the product set of the real numbers, with the several representations (r_1, r_2), (r, θ), $a+bi$, e^{ix}, etc., form a satisfactory end point for this topic at the secondary school level.

2. <u>Fundamental Structures.</u> An examination of the sub-structures of algebra and their extension, by abstraction, to separate structures. This includes the study of the group, the ring (including the ring of polynomials) and the ordered field. While subsets of the several number systems provide excellent examples of these structures, the study should be extended to give the general important theorems for abstract groups and fields.

3. <u>Vector Space.</u> This study is initiated in the teaching of free vectors, centered vectors, multiplication by a scalar, scalar multiplication, and applications to the geometry of two-dimensions. Vector Space, subspaces, linear independence, linear transformations, matrices, and applications

to linear conditions gives a full knowledge for subsequent study of this subject that unites number and space.

4. Probabilistic Space. Sets and set functions form the initial study. The development of finite combinatorial analysis, including the binomial and multinomial theorems follows, and these two phases of study permit the development of outcome spaces and a probabilistic structure from an axiomatic point of view. This study sets the stage for continuous probabilistic spaces, which can be studied at the University. However, applications to simple hypotheses testing form a fitting climax to the secondary school study.

5. Basic Structure for Real Analysis. This study should be done through a set theoretic approach, but not a rigorous level. Geometric intuition should not only be permitted, but used extensively. The study of infinite sequences leads to the limit concept. Applied to functions, either by geometric intuition or δ - θ techniques, continuity can be established at a point, or over an interval. It is strongly urged that pathological functions be avoided at this stage. The derivative (at a point) is defined, and techniques and applications developed for the usual algebraic and transcendental functions. Integration should be introduced through summation; and the Riemann Integral, and applied to the solution of problems in area, moments, and the like. The course may include simple differential equations. A fitting climax to the study is the development of the theorems of the mean for both the integral and differential calculus and their relation to one another. The fundamental theorem of Integral Calculus can well be deferred to University study, as well as partial derivatives, multiple integration, and convergence theory. It is understood that iterative process for solution of polynomial equations and summation approximation of integrals will be studied in relation to digital computer operation.

All material that does not relate directly to one of the above listed five fundamental systems of mathematics should be very seriously assessed as to their theoretical and practical importance, before being introduced into the program. The proposed study must be done thoroughly, properly, with unhurried calm, and deep comprehension, if the stated objectives are to be realized. The details of teaching each of the systems can be obtained by studying the books listed in the bibliography below.

Teachers College
Columbia University

BIBLIOGRAPHY

Kristensen og Rindung. Matematik 1, 2, 3. Gads Forlag, København, 1963, 1964, 1965 (for years 10, 11, 12).

Lichnerowicz A. L'enseignement des Mathématiques. Delachaux et Niestle, Neûchatel, Suisse, 1955. pp. 63-74. L'esprit de l'Algèbre Moderne.

O.E.C.D., New Thinking in School Mathematics, Paris, 1961.

O.E.C.D., Synopses for Modern Secondary School Mathematics, Paris 1961.

O.E.C.D., Mathematics Today, A guide for Teachers, Paris, 1965.

S.M.S.G. Intermediate Mathematics, Yale University Press, 1961.

S.M.S.G., Elementary Functions. Yale University Press, 1961.

S.M.S.G. ,Analytic Geometry. Yale University Press, 1965.

S.M.S.G. Calculus. A.C. Vroman, Inc., Pasadena, Calif. 1965.

Résumé de l'article

L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE ET DE L'ANALYSE A L'ECOLE SECONDAIRE

H.F. Fehr

L'article concerne l'enseignement de l'algèbre et de l'analyse dans les trois classes supérieures de l'école secondaire.

L'auteur met en relief trois objectifs de l'enseignement des mathématiques à l'école et leurs conséquences :

1. inclusion des mathématiques dans l'éducation générale, en tant que composante nécessaire de la culture contemporaine, ce qui exige la modernisation du contenu et du traitement en classe de ce contenu ;

2. mise en évidence du rôle des mathématiques et de leurs applications dans les sciences physiques et sociales, ce qui exige la construction adéquate des programmes et de leur réalisation ;

3. la préparation des élèves en vue des habitudes et de la manière de penser nécessaires à leurs études ultérieures, ce qui exige l'enseignement de l'algèbre et de l'analyse dans l'esprit de la science contemporaine.

La condition préalable de la réalisation de ces objectifs consiste en une préparation préliminaire moderne en arithmétique, en algèbre, en géométrie et en trigonométrie. Les rapports logiques de ces objets d'études doivent être mis en évidence tout comme certaines notions méthodologiques (démonstration, axiomatique, logique déductive).

L'algèbre et l'analyse dans les classes supérieures doivent être l'extension et le développement de ces connaissances préliminaires. L'auteur propose un programme contenant :

1. L'étude stricte des nombres (cardinaux, rationnels et réels en tant que décimaux infinis et les nombres complexes) ;

2. les structures fondamentales (groupe, anneau, corps) ;

3. l'espace vectoriel ;

4. l'espace probabiliste (de l'analyse combinatoire jusqu'à l'axiomatique de la structure probabiliste) ;

5. les notions fondamentales de l'analyse des réels (approche théorique sans excès de rigueur, utilisation de l'intuition géométrique).

La bibliographie jointe présente en détail le développement des principes posés.

AXIOMATIQUE ET AXIOMATISATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Z. Krygowska

I. Formulation du problème.

Les opinions concernant la possibilité de l'initiation de l'élève à la méthode axiomatique et la place attribuée à cette méthode dans l'ensemble des mathématiques scolaires, sont extrêmement opposées. D'un côté on y voit l'élément indispensable de la culture mathématique à chaque niveau, on postule donc l'initiation à la méthode axiomatique comme condition absolument nécessaire de la modernisation de l'enseignement des mathématiques. Mais la conception pédagogique de ce postulat n'est pas claire et la possibilité de sa réalisation n'est encore qu'une hypothèse pas suffisamment vérifiée. De l'autre côté, on constate que la notion d'axiomatique n'est pas accessible à l'élève de l'école secondaire et ne lui est pas nécessaire. On justifie souvent cette opinion négative en se référant aux observations exécutées au cours de l'enseignement traditionnel de la géométrie déductive. Mais cette motivation ne peut pas être décisive, étant donné que les notions modernes de l'axiomatique et de l'axiomatisation ne sont pas les mêmes que les notions traditionnelles. C'est pourquoi la conception pédagogique de l'initiation à la méthode axiomatique doit être aussi élaborée d'une manière moderne, et les résultats des expériences basées sur cette conception nouvelle peuvent être différents de ceux de l'école traditionnelle. La question est donc entièrement ouverte et exige une recherche objective.

En procédant à cette recherche, il faut distinguer deux aspects de la méthode axiomatique :

A. La méthode axiomatique en acte, comme outil de la pensée mathématique dans les trois phases de son activité, à savoir : axiomatisation (recherche de la définition - la plus adéquate et la plus commode à manier - d'une structure) ; déduction (développement à l'aide de moyens logiques de la théorie de la structure ainsi définie) ; interprétation (application de cette théorie dans les domaines munis de la structure donnée).

B. La méthode axiomatique en tant qu'objet de la recherche méta-mathématique (conditions structurelles de sa correction, portée de la méthode, etc.)

Cette distinction entre l'outil opératif de la pensée et l'objet de l'analyse méthodologique est nécessaire pour éviter les malentendus possibles.

Au cours de la recherche pédagogique concernant la méthode axiomatique, c'est l'aspect A. qui nous intéressera exclusivement, le problème essentiel résidant dans l'élaboration de démarches pédagogiques conduisant à :

a) la formation dans la pensée de l'élève d'un concept qui, n'atteignant pas encore le niveau de la notion formelle, correspondrait néanmoins, pour l'essentiel, à la notion moderne de l'axiomatique (conçue comme la définition d'une structure) ;

b) l'initiation de l'élève aux procédés de la pensée axiomatique en acte (axiomatiser, déduire, appliquer) adaptés au niveau de son intelligence et aux matières du programme.

L'élaboration de la "pédagogie de l'axiomatique" - ainsi conçue - se trouve encore dans ses langes. Elle exige des recherches expérimentales de grande portée. C'est pourquoi, bien qu'on ait commencé des travaux de ce genre, il est encore trop tôt pour en tirer des conclusions définitives, d'autant plus que nous n'avons pas de renseignements plus détaillés concernant les réactions des élèves moyens à ces essais pédagogiques et nous ne connaissons pas de critères de l'évaluation et de l'appréciation statistique des résultats de ces essais.

Afin de "jalonner" la direction des travaux dans ce domaine, il faudrait :

a) mettre en évidence le fond naturel de la méthode axiomatique, donc mettre en évidence les intuitions sous-jacentes dans lesquelles la démarche pédagogique cherche toujours son point de départ ;

b) confronter avec les résultats de cette analyse la manière traditionnelle de présenter à l'élève la "méthode déductive" (en géométrie) en vue de mieux saisir les postulats de la nouvelle pédagogie dans ce domaine, unie à la nouvelle compréhension des notions en jeu d'un côté, et de l'autre en vue d'éviter les fautes pédagogiques depuis le commencement, résultant d'une interprétation fausse de ces notions :

c) élaborer les projets didactiques qui pourraient servir en tant qu'hypothèses de travail pour les expériences pédagogiques en classe.

Dans la suite, je vais esquisser certains points de ce programme. Il faut fixer notre attention sur les questions méthodologiques générales, en passant sous silence la discussion détaillée concernant les nombreuses axiomatiques différentes déjà établies à l'usage de l'enseignement.

II. Sens intuitif de l'axiomatique.

Je prends comme point de départ de mes remarques la notion d'axiomatique conçue en tant que définition. La première question concerne l'objet ainsi défini. Du point de vue des buts de notre étude pédagogique, il me semble nécessaire d'arriver rapidement à une esquisse intuitive ; la question sera donc traitée avec des simplifications - consciemment introduites - relativement aux aspects formels.

La mathématique contemporaine précise l'objet propre de sa recherche comme structure construite à la base de relations élémentaires ensemblistes omniprésentes dans tous les domaines d'activité du mathématicien.

Le problème primordial qui se pose donc aujourd'hui à la pédagogie des mathématiques est le suivant : est-il possible de faire comprendre aux élèves de l'école secondaire l'axiomatique dans ce sens ? Est-ce nécessaire ? La question est importante et nouvelle car le plus souvent on a mis et on met l'accent, dans l'enseignement, sur la phase de déduction et sur la rigueur du raisonnement. Or, la rigueur n'est qu'un aspect de la méthode axiomatique, l'aspect tout-à-fait naturel pour celui qui comprend bien la nature de l'objet de la recherche mathématique. J'insiste sur ce point car la face extérieure des exposés mathématiques tous faits, si impressionnante, dissimule le mécanisme de la pensée mathématique même, ce qui apporte des conséquences nocives dans l'enseignement scolaire en particulier. Si le professeur tient compte avant tout des chaînes déductives et non des idées sous-jacentes, alors ce qui est naturel pour le mathématicien devient artificiel pour l'élève. La rigueur se présente à lui comme "la camisole de force" imposée par le maître.

Il y a des raisons psychologiques pour justifier l'hypothèse qu'on pourrait éviter cette situation en introduisant dans l'enseignement le concept de l'axiomatique en tant que définition d'une structure, cette introduction étant consciente, claire, libre de faux-fuyants qui ne peuvent que dégénérer la pensée mathématique de l'élève.

Ce postulat peut être considéré comme trop ambitieux ou même illusoire, étant donné le degré de l'abstraction des notions en question.

Evidemment, s'il ne nous était pas possible d'initier les élèves à la méthode axiomatique, en partant de leurs intuitions, de leurs expériences personnelles, de la marche naturelle de leurs pensées, des notions qui leur sont déjà familières, il nous faudrait éliminer à priori notre programme de nos considérations pédagogiques. Heureusement les aspects intuitifs de la notion de structure sont immédiatement visibles. De plus, le procédé axiomatique, dépourvu de formalisme, se révèle dans son germe, dans sa généalogie psychologique, comme un procédé naturel de la pensée humaine qui, dans sa forme même naïve, ne pourrait ni s'orienter dans la réalité, ni transformer cette réalité sans prise de conscience des relations, sans les deux opérations fondamentales de schématisation et d'extrapolation de données réelles, grâce auxquelles la réalité se reflète dans la pensée sous ses aspects différents, dans la forme de structures différentes.

Il est vrai que la voie conduisant de ce concept primitif, quoique omniprésent, de la structure aux notions formalisées des mathématiques modernes est très longue et très compliquée, que ces notions n'ont été définies formellement qu'après beaucoup de siècles de l'histoire de la science, mais il est aussi vrai que les mathématiciens contemporains ont mis en relief un concept sous-jacent à la pensée mathématique créatrice de tous les temps. Les mathématiques ont toujours été, bon gré, mal gré, relationnelles ; l'esprit moderne consiste dans la prise de conscience de ce caractère et dans son expression claire et précise du point de vue méthodologique.

Cette prise de conscience du caractère structurel des mathématiques et de son expression formelle facilite l'accès de la pensée naïve aux notions abstraites - ce qui peut paraître paradoxal. Considérons, par exemple, la position de la pensée naïve relativement aux axiomatiques : celle de la théorie des groupes et celle de la théorie des entiers naturels de Peano. Pour la pensée naïve, il y a une différence essentielle entre ces deux situations, la première axiomatique étant une "véritable définition", fixant le sens du terme "groupe", donc exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'un ensemble et d'une opération soit un groupe, la deuxième axiomatique étant saisie comme l'expression des conditions nécessairement satisfaites par le concept intuitif de l'entier naturel, mais point suffisantes. Les modèles isomorphes de l'axiomatique de Peano sont traités par la pensée naïve concrètement comme différents, elle n'est donc pas encline à accepter l'axiomatique en jeu en tant que définition de ce nombre naturel, qui lui a été familier depuis l'enfance. Les discussions des philosophes et des mathématiciens mêmes prouvent que ces difficultés ne sont pas propres à la pensée naïve seulement. La situation devient tout

à fait différente (nous considérons toujours le problème du point de vue de l'intuition) si l'on interprète l'axiomatique de Peano comme la définition de la structure appelée "ordre naturel", cette structure étant saisie comme la structure essentielle de l'ensemble de ces "nombres naturels" qu'on a connus depuis l'enfance et pratiquement utilisés. L'axiomatique de Peano est dans ce sens pour la pensée naïve une "véritable définition" de l'ordre naturel, n'étant pas néanmoins une "véritable définition" du nombre naturel. Et bien que, du point de vue formel, on distingue les naturels utilisés en métamathématiques de ceux dont on s'occupe dans la théorie axiomatique de Peano, il ne serait pas possible de faire cette distinction dans l'enseignement. Heureusement ce n'est pas nécessaire à la lumière de la notion de structure. Les mêmes remarques concernent la géométrie.

C'est une découverte pédagogique très importante de nos jours, qu'il est souvent plus facile de trouver les moyens de la transplantation dans le domaine scolaire des "notions savantes" en prenant comme point de départ du projet pédagogique l'analyse de ces notions dans leur forme pure, logiquement parfaite que dans leur forme apparemment plus intuitive mais vague. L'intérêt pédagogique porté à cette analyse découle de cette leçon impressionnante que nous ont donnée les recherches concernant les fondements des mathématiques : le travail visant l'organisation précise et formelle d'un domaine d'idées abstraites, révèle souvent les germes primitifs et naturels de ces idées. Cette remarque concerne aussi la notion moderne de la méthode axiomatique qui nous permet d'apercevoir ses sources non soupçonnées dans la pensée naïve même. Pour concrétiser cette remarque, il faut avoir seulement le courage de mettre en évidence les aspects intuitifs du formalisme. Je parle de "courage", car du point de vue de la pensée mathématique précise, mes considérations peuvent être traitées comme abus des conceptions scientifiques, comme leur vulgarisation inadmissible ; la pensée didactique traditionnelle au contraire peut y apercevoir le jeu abstrait peu responsable du point de vue de l'enseignement. Ayant ce courage, je vais concrétiser mes remarques concernant les sources naturelles de la méthode axiomatique, en analysant un exemple du raisonnement d'un enfant à l'age préscolaire, exemple choisi parmi les autres recherchés par moi au point de vue de "la pédagogie de la méthode axiomatique".

Paul (6 ans 1/2) veut convaincre ses parents qu'il peut aller seul de la gare à la maison de ses grands-parents sans traverser l'avenue principale (défendue à Paul à cause de la grande circulation). Pour démontrer sa thèse, Paul esquisse sur une feuille de papier le réseau des lignes et des points présentant les rues et les lieux dignes d'atten-

tion concernant l'argumentation qu'il va présenter (la gare, la maison des grands-parents, les points-carrefours des rues). De cette façon, Paul construit un modèle graphique d'une certaine structure topologique, à savoir un modèle du complexe linéaire particulier, sans conscience de sa polyvalence et sans extrapolation des données réelles. Au cours de cette construction, Paul ne s'intéresse qu'à deux relations agissant dans l'ensemble fini de points et de voies : a) "on peut passer du point x au point y par la voie m", b) "le point y est le point-carrefour de la voie m et de la voie n", en négligeant visiblement les autres relations (distances, grandeurs, figures géométriques) dont il a saisi la connaissance pratique au cours de ses expériences quotidiennes personnelles. Le schéma ainsi obtenu concerne le système de ces deux relations, qui ne sont point isolées, mais représentées dans leurs rapports mutuels. On constate l'entente entre Paul et son père, relativement aux données initiales ainsi fixées dans la symbolique choisie. Paul essaie de démontrer sa thèse en utilisant le même code ; il essaie de démontrer cette fois-ci une thèse concernant un complexe linéaire particulier. Cette démonstration ne réussit pas ; en avouant que le schéma graphique n'est pas muni de la propriété en jeu, Paul ne cherche point d'arguments nouveaux ; il est sûr que sa thèse a été fausse, il constate qu'on ne peut pas passer de la gare à la maison des grands-parents sans traverser l'avenue principale. Il décode de cette façon le résultat de sa recherche, faite dans une réalité représentante, en la projetant dans la réalité représentée.

Paul ne connaît pas de termes et de notions savants ; il n'est pas conscient d'avoir isolé une structure particulière parmi beaucoup d'autres embrouillées dans la réalité et d'avoir défini cette structure correctement, en utilisant la structure topologique de son schéma graphique.

Il faut souligner trois phases singulièrement importantes dans ce processus. La première, c'est la fabrication du schéma et l'acte de décision que le schéma est déjà achevé et qu'il exprime tout ce qu'on a voulu mettre en évidence. De cette façon, on a fini de présenter les prémisses ; dès ce moment, la structure en jeu a acquis une certaine indépendance de la situation initiale. La seconde phase, c'est la déduction -sui generis - qui ne concerne que la structure ainsi définie, donc qui n'utilise que les prémisses et les "règles du procédé" correspondant aux opérations concrètes dans la réalité (mouvement du crayon -passage par la rue). Cette phase aboutit à une conclusion "formelle" concernant le schéma. La troisième phase, c'est l'application de cette conclusion et l'acceptation rigoureuse des conséquences concernant la réalité initiale. En opposition, certaines thèses suggérées à Paul et motivées par la lecture directe du schéma sont rejetées du coup (par exemple : "cette rue est plus longue que celle-

ci"). Paul traite ces propositions comme non-sens, parce qu'il a construit lui-même le schéma, et il a pleine conscience de ce qu'il a voulu conserver et de ce qu'il a voulu négliger.

Nous apercevons, dans le processus que nous venons d'observer, la forme primitive et naturelle de l'axiomatisation, de la déduction et de l'interprétation en germe. Il y a évidemment une grande distance entre cette activité primitive et la méthode axiomatique en acte, entre le concept opératif d'une correspondance structurelle chez un enfant et la notion de structure chez un mathématicien. Mais s'il nous était possible de transformer successivement ce germe naturel du procédé axiomatique -encore profondément enraciné dans le concret - dans une méthode de penser et de résoudre les problèmes, en élevant pas à pas le niveau d'abstraction des schémas construits et utilisés, la pédagogie de la méthode axiomatique trouverait une de ses bases naturelles dans la méthodologie naïve de l'enfant même. Une des conditions absolument nécessaire de cette transformation, c'est la prise de conscience chez l'élève que les structures mathématiques reflètent les systèmes de relations se révélant dans la réalité d'une manière non seulement schématisante, mais aussi extrapolante des données réelles et que, grâce à cette transmutation essentielle, elles sont polyvalentes. /1

Paul n'est pas conscient de ce que son schéma, ainsi qu'un schéma quelconque, puisse être interprété différemment, car dans la situation de son petit problème, il n'a pas besoin de prendre ce fait en considération. Il n'a pas besoin non plus d'extrapoler les données réelles ; au contraire, la compatibilité exacte de ces données avec son schéma -concernant la structure en jeu - est la condition absolument nécessaire de la résolution correcte de son problème. Dans la même situation, se trouve le plus souvent l'enfant au cours de l'initiation à l'arithmétique des nombres naturels, et c'est pourquoi il n'y a pas d'abîme entre la pensée naturelle de l'enfant et son activité mathématique (l'état équilibré qui malheureusement cesse d'avoir lieu déjà au cours de l'étude des fractions). Au contraire, l'élève de l'école secondaire se trouve en face des structures-carrefours compliquées (géométrie, corps de réels), dont les composants élémentaires (structures de base) tirent évidemment leur origine du concret, mais qui sont devenus structures mathématiques grâce à la schématisation extrapolante des données réelles.

1. Ici et dans la suite, on interprète la notion de polyvalence dans le sens primitif (les modèles isomorphes d'une structure sont traités par les élèves comme différents, mais ayant la même structure "totale".)

L'incompréhension du caractère de cette transformation conduit souvent dans l'enseignement secondaire des mathématiques à une situation paradoxale : d'un côté, il y a dans la pensée de l'élève moyen une confusion fatale de l'abstrait et du concret quand il déduit, raisonne et démontre, de l'autre il y a, au contraire, la séparation stérile de l'abstrait du concret, quand il doit appliquer ses connaissances mathématiques à la résolution des problèmes pratiques. La conception des mathématiques chez l'élève moyen devient donc artificielle et l'abîme entre sa pensée naturelle et ses activités organisées dans l'enseignement est profond.

En analysant cette situation, je ne vois pas de difficultés nouvelles et spécifiques pour l'initiation à la méthode axiomatique en dehors de celles qui existent déjà dans notre enseignement traditionnel, et qui existeront aussi dans l'enseignement modernisé, car elles découlent du rapport compliqué du concret et de l'abstrait en mathématiques. Au contraire, il y a des raisons justifiant l'hypothèse que les démarches pédagogiques visant cette initiation sont les mêmes que celles qui pourraient faciliter l'équilibrage de l'abstrait et du concret dans la pensée de l'élève. Je ne considère donc pas que l'introduction de la pensée axiomatique exige un enseignement plus détaché des intuitions de l'élève que celui de tradition, et plus stérile quant aux applications, sous une réserve essentielle : que le problème ne soit pas réduit à la construction d'une belle axiomatique (qui est évidemment très importante) et à la projection de cette axiomatique du "ciel mathématique" dans la réalité scolaire.

III. Axiomatiser - décrire et définir.

Dans son travail, le mathématicien professionnel, aussi bien que l'élève, rencontre des situations où il doit formuler lui-même une définition, ainsi que des situations où il doit apprendre le sens d'une notion d'après une définition formulée par quelqu'un d'autre.

Cette distinction doit être prise en considération dans l'analyse du problème pédagogique de l'initiation à la méthode axiomatique, car on peut essayer d'y arriver par les deux voies différentes : la voie qui passe par l'étape de l'axiomatisation en classe, et la voie qui passe à côté de cette étape partant, dès le début d'une axiomatique toute prête présentée à priori aux élèves. Ces deux types de procédés pédagogiques mobilisent les activités différentes de la pensée, révèlent les difficultés et les avantages différents. C'est pourquoi je vais les traiter tour à tour et indépendamment.

Commençons par un aperçu des situations de premier type, à savoir des situations dans lesquelles on construit généralement une définition

ou plus particulièrement une axiomatique.

Ce qui nous intéresse là, au point de vue pédagogique, c'est le jeu de deux démarches fondamentales de la pensée, intervenant dans le processus de définir : l'analyse qui s'exprime dans l'élaboration d'un compte-rendu et la synthèse qui aboutit à la construction d'un projet. Ces deux aspects jouent dans des situations différentes des rôles différents ; leurs rapports mutuels décident du caractère de la définition qui est saisie par celui qui définit soit comme une définition-compte-rendu ou plutôt comme une définition-projet.

Ainsi, par exemple, Cauchy a construit la définition "plutôt compte-rendu" de la limite d'une fonction, car il a légalisé formellement un concept qui a été antérieurement utilisé par les mathématiciens opérativement et d'une manière créatrice, étant néanmoins vague au point de vue de la logique. L'analyse de la géométrie euclidienne faite par Hilbert aboutissant à son système d'axiomes comporte le même caractère. Un élève qui, après avoir saisi une notion intuitivement et opérativement (dessin, modèle, activité concrète) cherche une définition, exécute un travail semblable. Le caractère particulier de ce processus consiste dans le fait que celui qui cherche une définition a posteriori n'exprime dans cette définition, qu'une certaine partie de ses connaissances et de ses intuitions concernant l'objet ainsi défini ; il lui faut donc choisir et isoler dans l'ensemble de propriétés déjà saisies, un sous-ensemble de propriétés, dont la conjonction est suffisante pour obtenir les autres. Ce choix peut être plus ou moins libre, et les critères de ce choix peuvent être différents et même diamétralement opposés (par exemple les définitions "naturelles" dans les mathématiques classiques ou les définitions "génétiques" - "constructives" - dans l'enseignement, ou "les théorèmes clefs", en tant que définitions chez Bourbaki etc). Le procédé de définir à posteriori n'est donc souvent pas facile, il exige un effort créateur et une connaissance large et profonde des structures élémentaires qu'on utilise pour définir les structures plus compliquées.

La construction d'une définition a priori exige d'autres démarches de la pensée et un autre genre de création. A la base de l'axiomatique de la géométrie euclidienne qui a été le résultat de l'élaboration d'une définition -compte-rendu, on a proposé à priori les nouvelles géométries, par exemple, la géométrie non-archimédienne. C'étaient les définitions-projets construites par une opération sur l'axiomatique donnée : omission d'un axiome, remplacement de certains axiomes par les autres, etc. Les classifications, les généralisations, les particularisations, les variations des conditions et les combinaisons différentes des structures déjà connues, conduisant aux structures-carrefours, peuvent

devenir les points de départ des définitions-projets en général et des axiomatiques-projets en particulier.

L'histoire des mathématiques nous présente des illustrations frappantes du jeu de ces deux aspects - dont nous venons de parler - dans le processus de définir.

L'organisation pédagogique rationnelle de ce jeu qui transforme une description en une définition, un compte-rendu des intuitions et des connaissances antérieures en un projet de structure, nous semble la condition absolument nécessaire pour cette forme de l'initiation de l'élève à la méthode axiomatique qui tâche de mettre en évidence aussi l'étape de l'axiomatisation.

Pour préciser cette remarque, je vais considérer deux exemples. Je passe sous silence l'appréciation et la critique de ces procédés à de nombreux points de vue (par exemple au sujet du choix de l'axiomatique). Ce qui nous intéresse là exclusivement ce sont deux situations différentes dans l'axiomatisation, à savoir :

a) la situation où l'on dégage une structure commune aux nombreux modèles non isomorphes déjà bien connus, donc la construction d'une structure à priori polyvalente ;

b) la situation où l'on tâche d'axiomatiser un seul domaine des connaissances antérieures qui forment une théorie encore peu rigoureusement construite ou qui sont peu détachées du réel, se trouvant à la frontière du concret et de l'abstrait, etc..

La différence entre ces deux situations est bien connue dans les mathématiques. Elle est dissimulée par les axiomatiques toutes prêtes mais elle s'est fait jour d'une manière évidente au cours du procédé de l'axiomatisation. Il me semble que la compréhension de ce procédé exige la mise en évidence de ces deux aspects différents même dans l'enseignement scolaire.

Exemple 1 : Description d'une structure commune à plusieurs modèles.

Un petit groupe d'élèves (9 élèves âgés de 15 ans) procède à l'étude de certaines notions algébriques/[1]. On s'occupe d'ensembles divers, on y définit des opérations algébriques diverses et des ordres divers. La

1. Fragment d'une expérimentation contenue dans le travail de diplôme en méthodologie de l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale Supérieure de Cracovie.

personne qui organise les travaux suggère tour à tour certains exemples de treillis. Les élèves constatent avec impatience : "c'est toujours la même chose ! ". La question : pourquoi est-ce la même chose, si les objets, les ordres, les opérations sont complètement différents dans les exemples considérés, provoque la recherche en groupe d'une réponse qui aboutit à l'axiomatisation de la structure de treillis. Au cours de cette "description schématisante" les élèves proposent d'inscrire aussi dans la liste des "propriétés communes" les propriétés qui ne sont point communes à tous les exemples considérés comme "la même chose" (distributivité de multiplication relativement à l'addition, propriété spécifique de l'ordre total). Mais on s'aperçoit rapidement que certains parmi les exemples analysés échappent à ces règles. On rejette donc ces propositions ; on rejette aussi les propositions concernant les propriétés qui peuvent être déduites immédiatement en partant des autres déjà reconnues comme "propriétés communes" par exemple commutativité des opérations, loi d'absorption). Finalement on obtient une axiomatique-carrefour de deux axiomatiques connues de la structure des treillis. On introduit le terme : treillis.

De cette manière la description ayant pour but la construction d'un schéma englobant plusieurs modèles aboutit à la définition axiomatique grâce à :

a) la description symbolique du schéma qui facilite la déduction sans retour aux modèles initiaux,

b) la construction dès le début consciente d'un schéma polyvalent,

c) le terme fixant la synthèse d'un objet mathématique nouveau.

Dans la suite, on définit encore le treillis distributif en ajoutant à l'axiomatique déjà établie l'axiome supplémentaire.

Les trois types d'exercices mettent en évidence les manières différentes de l'utilisation de l'axiomatique ainsi établie et conçue comme définition :

a) la reconnaissance de la structure de treillis dans les cas particuliers (question : est-ce le treillis ?) ;

b) la déduction (question : les deux opérations du treillis jouissent-elles de propriétés analogues à celles des opérations arithmétiques ? On constate et on démontre certaines analogies: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a < b \Longrightarrow a.c < b.c$ etc. et certaines différences : $a.a = a$, $a + a = a$, $a + ab = a$ etc) ;

c) l'interprétation des résultats de la déduction dans les modèles différents, ce qui révèle aux élèves (d'une façon naïve mais impressionnante) le mécanisme économisant de la pensée axiomatique (par exemple à la question :

$$\text{P.P.CM}\left\{b, \text{P.G.C.D.}\left[\text{P.P.C.M.}(a,b), \text{P.P.C.M.}(a,c)\right]\right\} = ?$$

un des élèves donne avec satisfaction et rapidement la réponse : $= \text{P.P.C.M.}(a,b)$, en utilisant la formule $(a+b)(a+c)+b = a+b$, précédemment calculée pour le treillis distributif).

La manière de résoudre ces problèmes et les remarques faites par les élèves prouvent qu'ils ont compris l'axiomatique comme définition d'une structure et la déduction comme la méthode unique et naturelle de la recherche de cette structure. Comment pourrait-on étudier le treillis sinon en se référant exclusivement à sa définition ?

Un des élèves pose la question : pourrait-on établir de la même manière toutes les mathématiques ? Voilà le problème d'un adepte potentiel de l'esprit bourbakiste.

Exemple 2 : La structuration progressive d'un domaine de connaissances intuitives par les structures élémentaires à priori déterminées/[1].

Je vais analyser le procédé de la structuration progressive des connaissances géométriques intuitives chez les élèves (âgés de 14 à 15 ans), visant la structure du plan métrique. On commence par l'initiation des élèves aux concepts : l'ensemble, certaines opérations sur les ensembles, l'application d'un ensemble dans un ensemble, l'ordre dans un ensemble, la distance dans un ensemble (au sens général : par exemple, les distances sur les surfaces d'un cube, d'une sphère, la distance dans un ensemble de nombres, dans un ensemble d'élèves relativement à certaines propriétés, etc.).

On met à profit la situation particulière : les élèves proviennent de différentes écoles, ils travaillent donc dans un groupe nouveau et avec un professeur nouveau /[2].

---

1. Projet didactique élaboré en liaison avec le projet d'un programme en Pologne du type "petite modernisation".

2. Cette situation a lieu dans la première classe de lycée en Pologne.

L'idée-pilote de l'axiomatisation qu'on peut présenter aux élèves dans cette situation est la suivante : il nous faut, au début de notre travail en classe, établir l'entente concernant le sens commun , suivant lequel nous utiliserons, par la suite, les termes géométriques, dont les idées sous-jacentes ne nous sont pas étrangères, à chacun de nous séparément. Nous avons déjà fixé un vocabulaire commun : l'ensemble, les opérations sur les ensembles, l'application d'un ensemble dans un ensemble, l'ordre dans l'ensemble, la distance dans l'ensemble. Nous tâcherons d'exprimer, d'une manière aussi concise que possible et en utilisant ce vocabulaire, le sens commun des relations géométriques que nous voulons mettre en évidence.

De cette manière, on procède à la structuration progressive du plan par les structures ensemblistes et topologiques saisies intuitivement et déterminées a priori. On vise donc toujours les relations (application : deux points-distance ; appartenance : deux point-droite ; produit de deux ensembles : deux droites, droites sécantes, parallèles, direction) , opérations sur les distances : trois points-distance (condition de collinéairité), l'ordre dans la droite-distance, etc. Voilà l'exemple du procédé. Les élèves mettent en évidence "l'ordre naturel" dans la droite (ils n'ont point d'idée d'un ordre dans la droite différant de "l'ordre naturel") en le "caractérisant" par les propriétés qui ont été soulignées le plus souvent dans l'enseignement précédent : entre deux points, il y a beaucoup d'autres points, chaque point est précédé et suivi par beaucoup d'autres points.

En vue d'éveiller le besoin de décrire la structure de la droite métrique d'une façon plus adéquate à l'axiomatique qu'on veut établir, le professeur peut utiliser la situation présentée sur le dessin. Etant donné bb' $\parallel$ cc' et bc', b'c on applique la droite A = bc sur la droite A' =b'c', en projetant le segment $\overline{bc}$ dans la direction bb' et en projetant une des demi-droites ouvertes dont la réunion est A'/$\overline{bc}$ dans la direction bc' et l'autre dans la direction b'c. On parachute ainsi sur A' l'ordre traité comme naturel dans A. Les flèches en couleurs illustrent les deux ordres en jeu.

L'ordre obtenu dans A' apparaît "insolite", mais il est "forcé" -grâce à ce parachutage - d'avoir les mêmes propriétés qu'on a jusqu'alors considérées comme "caractéristiques" pour l'ordre naturel. Les notions "entre", "successeurs", "prédécesseur" dans la droite deviennent relatives ; la structure décrite englobe les modèles qu'on veut éliminer ; elle est trop polyvalente. Le besoin d'une condition supplémentaire se manifeste.

Voilà la première constatation - toujours intuitive : "l'ordre insolite" - a été obtenu par une application choisie "malicieusement" par le professeur, car on a projeté une partie de la droite A dans une direction et l'autre dans une autre direction. En parachutant l'ordre naturel d'une droite quelconque A sur une droite quelconque A' à l'aide de la projection parallèle on obtiendrait l'ordre naturel dans A' et non pas un ordre insolite. On fixe une nouvelle propriété de l'ordre naturel : la projection parallèle d'une droite sur l'autre conserve l'ordre naturel (I).

La seconde découverte se révèle au cours de la recherche de la réponse à la question : qu'y a-t-il d'insolite dans l'ordre défini dans A' ? le point a' précède le point b' ; le point b' précède le point c' et malgré cela la distance a' c' est plus petite que la distance a'b'. Cela ne s'accorde pas avec le concept commun de l'ordre naturel dans la droite. Car en s'imaginant le parcours de la droite dans son ordre naturel à partir du point a <u>on doit</u> "s'éloigner" de ce point. Comment pourrait-on mettre en évidence cette image en n'utilisant que notre vocabulaire ? On établit finalement la propriété II : le point b se trouve dans l'ordre naturel entre le point a et le point c, si et seulement si a, b, c sont différents et ac = ab + bc.

La description ainsi achevée suffirait-elle pour distinguer l'ordre "insolite" de l'ordre naturel en A' ?

On constate : si une personne comprend les notions géométriques de cette manière <u>qu'elle soit d'accord avec nous</u> en ce qui concerne les propriétés I et II, elle sera <u>forcée d'avouer</u> que l'ordre défini dans A' n'est pas naturel, car cette constatation n'est que conclusion logique de la conjonction de I et II.

On procède pareillement par la suite ; on complète les axiomes au fur et à mesure du besoin d'établir le "sens commun" et d'éviter les malentendus possibles, mais toujours en n'utilisant que les structures déterminées par le vocabulaire fixé au début. Les démonstrations des théorèmes intuitivement évidentes ou de ceux dont on a fait la connaissance dans l'enseignement précédent, ainsi que les définitions connues mais établies de nouveau, ne sont point superflues, au contraire elles deviennent très importantes, car elles prouvent que "notre description a été bonne", qu'elle définit les relations en jeu conformément à ce que nous avons voulu mettre en évidence. Les exemples "malicieux" nous suggèrent au contraire la nécessité d'ajouter des axiomes nouveaux, car "notre description n'est pas assez bonne" pour éviter les malentendus dans la compréhension du "sens commun" des relations en jeu . Les découvertes et les démonstrations des théorèmes nouveaux, les définitions nouvelles, prouvent d'un autre côté que notre connaissance de ces relations n'a pas été encore et ne sera jamais complète.

A un certain moment, on se décide - à la suggestion du professeur - à traiter la description comme achevée : "nous ne nous occuperons, dans la suite, que de schémas de cette structure". On fait le compte-rendu des propositions de base, on clôt la liste. Cet acte de décision transforme la description successivement élaborée dans la définition de la structure métrique du plan qui, dès ce moment, sera l'objet fixé d'une manière précise de l'étude déductive.

Comme nous l'avons déjà souligné, nous passons sous silence la discussion sur les axiomatiques établies dans les exemples précités. Ce qui nous intéresse seulement dans tous ces procédés, c'est le programme pédagogique qui leur est commun : initier les élèves à la méthode axiomatique par "l'axiomatisation guidée" en classe.

Nous utilisons le terme "l'axiomatisation guidée" pour désigner la situation pédagogique suivante :

a) le professeur envisage une axiomatique choisie comme base du cours,

b) il organise une situation problématique - source d'un problème - ou présente lui-même directement aux élèves un problème qui devient le point de départ d'une suite de situations favorables à l'élaboration en groupe de l'axiomatique en jeu.

Les procédés précités ont été guidés par les idées-pilotes présentées clairement aux élèves : "trouver une même chose dans les situations données différentes", "décrire le sens commun de certains termes à l'aide d'un vocabulaire a priori défini".

Relativement à ces idées différentes le jeu de deux aspects - le compte-rendu et le projet - intervenant dans le processus de définir, a été organisé aussi différemment. Dans le premier exemple, on nous a présenté le procédé typique de l'abstraction où les deux aspects : le compte-rendu et le projet jouent des rôles importants au même degré (le compte-rendu de situations diverses aboutissant au moyen de l'analyse à la mise en relief des caractères communs et à la synthèse nouvelle de ces caractères détachés de leurs réalisations particulières, s'exprimant dans la définition-projet d'une structure). Le troisième exemple n'est qu'un essai du compte-rendu des connaissances antérieures, structurées d'ensemble d'une manière nouvelle successivement au cours de ce compte-rendu.

L'esprit moderne de toutes ces démarches s'exprime dans : 1) l'idée pilote du procédé ; 2) l'utilisation des moyens modernes (structures élémentaires mathématiques préfabriquées en vue d'accomplir le montage en jeu, le langage et la symbolique ensemblistes) ; 3) la présen-

tation de l'axiomatique élaborée comme une description définissant une structure, fixée par le terme adéquat (espace vectoriel, treillis, structure métrique du plan), 4) le passage à la déduction, trouvant sa motivation dans le caractère structurel de l'objet même de la recherche 5) la mise en évidence d'un certain concept, primitif encore, de la polyvalence de la structure envisagée, la construction de la structure polyvalente par définition dans le premier cas, le rétrécissement conscient de la polyvalence des structures initiales par la mise en relation de ces structures dans la deuxième situation.

Les démarches dont nous venons de parler n'épuisent évidemment pas toutes les formes possibles de l'axiomatisation guidée. En les présentant à titre d'exemple, nous avons voulu seulement accentuer la diversité des moyens pédagogiques qu'on peut utiliser ainsi qu'attirer l'attention sur la richesse des situations favorables à l'organisation des activités différentes du caractère profondément mathématique de la pensée juvénile, qui se présentent au cours de ce processus. De tels essais, dissimulés dans l'intimité de la classe, attendent encore leur analyse pédagogique perspicace et une appréciation objective.

L'axiomatisation guidée en classe n'est pas évidemment la recherche ouverte et libre ; on la maintient dans un chenal étroit. C'est la conséquence inévitable de la formulation du problème et des situations conditionnant la pensée de l'élève et créées en vue d'établir l'axiomatique a priori fixée par le professeur. Néanmoins, l'élève participe ici activement à la recherche en groupe d'une définition, s'efforçant de préciser et de formaliser ses intuitions encore peu détachées de leurs sources concrètes.

Le procédé, exigeant au même degré une grande activité de la pensée, mais dont le sens est contraire, c'est le travail nécessaire à la prise de conscience préliminaire d'un objet d'après la définition verbale ou symbolique formulée par une autre personne, en particulier donc la prise de conscience préliminaire d'une structure d'après l'axiomatique toute prête. J'utilise ici l'expression "prise de conscience préliminaire", car la compréhension d'une structure est un processus ; c'est au cours du développement déductif de l'axiomatique qu'on pénètre pas à pas de plus en plus profondément dans le sens de la structure définie. Le débrouillage préliminaire du sens de la définition en mathématique exige déjà non seulement une certaine maturité de la pensée, mais aussi une technique de ce procédé. Parmi les démarches différentes de ce genre, la plus primitive et la plus spontanée est la recherche des modèles, la construction des exemples particuliers, appartenant à un domaine familier de la connaissance et satisfaisant aux conditions définissantes. Ce moyen est utilisé aussi par les auteurs de traités mathématiques

d'un niveau même très élevé, où l'on interprète souvent les définitions formulées avec rigueur logique, à l'aide d'exemples particulièrement choisis en vue de faciliter au lecteur la compréhension du sens de ces définitions. Et pourtant, c'est la définition formelle qui devrait présenter ce sens de la manière la plus claire, la plus absolue, une particularisation quelconque apportant toujours des éléments superflus, des caractères accidentels, donc masquant ce qui est essentiel ! La réalité est néanmoins différente et il arrive qu'on ne puisse saisir le sens du schéma formellement parfait qu'au cours de sa concrétisation ; il arrive aussi que cette prise de conscience ne se produise qu'au cours de la déduction : à la lumière des propriétés établies formellement presque à l'aveuglette on saisit a posteriori la notion en question.

L'élève moyen reste le plus souvent perplexe vis-à-vis d'une définition plus compliquée. Il ne sait comment dégager de ce texte les opérations nécessaires au montage des représentations appartenant aux domaines qui lui sont familiers. Les stratégies effectives et rationnelles du traitement de la définition mathématique doivent donc trouver leur place adéquate dans la pédagogie des mathématiques à chaque niveau. L'apprentissage de savoir décoder la définition formelle doit donc être traité comme problème pédagogique de la même importance que l'apprentissage de savoir définir. De ce point de vue, on peut aussi organiser le travail en groupe concernant l'axiomatique présentée aux élèves a priori, à condition que :

1. l'axiomatique en question ne soit qu'une composition très simple des structures élémentaires, bien connues des élèves et exprimées dans la terminologie et dans la symbolique déjà souvent utilisées,

2. les élèves aient à leur disposition plusieurs modèles différents de la structure définie qui leur sont familiers.

Pour donner un exemple typique de ce genre, envisageons la notion du groupe (nous pensons aux élèves âgés de 15 ans, ne connaissant pas le terme "groupe", mais ayant la notion générale de l'opération et des propriétés d'une opération). La recherche en classe des modèles différents de cette structure, construits selon le programme présenté dans la définition axiomatique, donne l'occasion de démarches pédagogiques instructives. Les corrections progressives des exemples proposés par les élèves, souvent ne satisfaisant qu'une partie des conditions, la recherche de la réponse à la question : "est-ce un groupe" ? etc. tout cela n'est qu'un travail normal visant la compréhension de la définition mathématique en général. Mais étant donné l'objet ainsi défini, une structure abstraite polyvalente, les démarches, dont nous venons de parler, deviennent un mécanisme essentiel de l'initiation à la méthode

axiomatique, établissant les rapports corrects entre le formalisme et les intuitions sous-jacentes. L'abondance des modèles différents non-isomorphes de l'axiomatique donnée, découverts en groupe, garantit l'équilibre nécessaire, en créant une certaine familiarité avec laquelle la pensée peut se mouvoir dans le vide du formel, et en protégeant cette pensée contre l'obstination dangereuse par les intuitions provenant d'un modèle particulier. On donne la vie au schéma formel, qui reste néanmoins objet abstrait dont les propriétés ne peuvent être établies que par le développement déductif de sa définition.

Ce besoin de donner la vie du concret au vide du formel est très fort chez les élèves (et pas seulement chez les élèves).

On a présenté, par exemple, à titre d'essai - dans le cadre d'un travail de diplôme - (Ecole Normale Supérieure de Cracovie) à un groupe d'élèves (âgés de 16 ans et doués) une variante de l'axiomatique de Bachmann, sans interprétation quelconque, en leur disant seulement: les propositions en question concernent des objets et des opérations, dont nous ne connaissons rien d'autre. Pourrait-on en déduire d'autres informations concernant ces objets et ces opérations ? Les élèves ont démontré certains théorèmes simples, mais ils ont désapprouvé ces démarches à "l'aveuglette", quoique les calculs formels selon les règles a priori fixées leur semblaient faciles. L'interprétation géométrique a apporté un soulagement visible et a éveillé à son tour l'intérêt porté au traitement formel du problème, car on a trouvé de la satisfaction dans l'économie du calcul, qui "avait un sens". L'équilibre entre le concret et le formel rétabli, la beauté de la pensée algébrique a été révélée d'une manière naturelle et impressionnante.

Remarquons, que pour initier les élèves à la méthode axiomatique, ce n'est pas le plus important - et même ce n'est pas nécessaire - de commencer par des explications générales concernant la notion de l'axiomatique. On peut agir axiomatiquement sans parler d'axiomatique. Le professeur aurait un grand succès s'il lui était possible de conduire les élèves à un niveau où ils pourraient décrire, en utilisant le langage qui leur est familier, le procédé axiomatique, comme leur pratique mathématique, en prenant connaissance - comme Monsieur Jourdain découvrant qu'il parle en prose - qu'ils ont appliqué d'une manière naturelle une "méthode savante", importante non seulement dans les mathématiques, mais -selon l'avis de certains chercheurs - avant tout dans les applications des mathématiques. La condition nécessaire de cette prise de conscience consiste d'un côté dans l'organisation de l'enseignement passant à chaque niveau par les étapes de l'observation, de la mathématisation, de la déduction et de l'application, de l'autre, dans

la construction des axiomatiques adéquates, favorables à cette organisation.

IV. <u>L'étape précédente.</u>

Nous avons fait un passage brusque de l'activité spontanée axiomatisante du petit Paul à "l'axiomatisation guidée" en classe. Qu'est-ce qui doit avoir lieu dans l'intervalle ?

Les tâches de l'enseignement des mathématiques jusqu'à l'âge de 14 ans sont multiples et la préparation à la méthode axiomatique n'en est qu'un aspect très particulier qui n'est pas le plus important. Mais, en ce qui concerne la question ici considérée, cet aspect particulier nous intéressera avant tout, car comme je l'ai souligné, l'essai d'une structuration plus globale doit être précédé par des structurations fragmentaires, restreintes, limitées. Les activités différenciées conduisant à la schématisation et à l'extrapolation des expériences réelles, la prise de conscience des relations liant les propriétés des objets abstraits ainsi obtenus, les déductions locales etc. tout cela peut être organisé par paliers dans l'enseignement primaire et dans les premières classes de l'école secondaire, sans établir nécessairement dès le début, une construction globale. Tous les procédés, dont j'ai donné des exemples en parlant de "l'axiomatisation guidée", et beaucoup d'autres analogues peuvent y trouver leur réalisation locale : le transport d'une structure, le dégagement d'une structure de situations différentes, le rétrécissement d'une structure par son croisement avec d'autres, la généralisation d'une définition ou sa transformation visant l'invariance d'une structure particulière (par exemple au cours du passage du plan à l'espace à trois dimensions), etc.

Trois conditions me semblent absolument nécessaires pour le passage au palier supérieur de l'axiomatisation systématique.

1. L'étape préparatoire doit être organisée dès le début de la manière visant la structuration moderne des notions et des opérations se détachant pas à pas du réel. Il faut arriver aussitôt que possible à la prise de conscience -peut-être encore naïve et partielle - des structures élémentaires les plus simples ensemblistes, algébriques et topologiques, ainsi qu'à l'utilisation de ces structures et du langage adéquat au cours des structurations locales.

2. Le second postulat concerne le développement des notions géométriques. L'opération fondamentale de la schématisation extrapolant les données réelles devrait être saisie et appliquée consciemment par l'élève. Les exemples des schémas géométriques construits, recherchés

et appliqués en vue de résoudre des problèmes pratiques peuvent servir comme des exemples d'introduction. L'utilisation des schémas géométriques, en vue de concrétiser les idées plus abstraites (au cours de la résolution de certains problèmes arithmétiques ou en tant que schémas de Venn etc.), mettrait en évidence les "deux visages" du schéma géometrique : l'abstraction pour une réalité et le concret pour une autre.

3. La troisième condition concerne l'organisation déductive locale des matières de l'enseignement : les conclusions immédiates au commencement, l'équivalence de deux définitions ; dans la suite - les situations, où l'élève, ne pouvant pas se procurer des données complémentaires, est forcé de se servir d'un ensemble fermé d'informations pour résoudre un problème, ainsi que les situations où l'élève obtient comme problème à résoudre, d'établir une propriété ne se référant qu'aux informations a priori limitées, quoiqu'il connaisse encore les autres qu'il pourrait utiliser ; les situations où l'élève se pose lui-même de pareilles restrictions ; les situations où l'élève veut convaincre qu'il a trouvé une solution juste (par exemple une construction géométrique, etc.) L'enseignement doit rendre l'élève conscient de ces procédés, qu'il applique souvent spontanément. Ce qui doit être finalement acquis, c'est la prise de conscience chez l'élève que l'on ne peut raisonner déductivement que sur les relations, que même si au début on a formulé des informations-clefs visant des objets particuliers, les conclusions concernent les objets quelconques satisfaisant aux prémisses exprimées dans ces informations. En résolvant un problème de cette manière, on résoud toujours une multitude, une classe de problèmes; bon gré, mal gré, on obtient une conclusion plus large que celle qu'on s'efforçait d'obtenir, car bien qu'on ait visé des objets, on a agi sur des structures.

Ce mécanisme peut être mis en évidence à chaque pas, à chaque niveau, même au cours de la résolution des problèmes arithmétiques d'un genre banal.

V. Organisation axiomatique du cours.

Une organisation axiomatique des matières de l'enseignement d'ensemble à partir d'un certain niveau de l'école secondaire est évidemment nécessaire pour l'initiation pédagogique des élèves à la méthode axiomatique. Il est trop tôt encore de décider quel doit ou quel peut être ce niveau, étant donné que les expériences continuées actuellement dans différentes écoles-pilotes admettent comme points de départ des niveaux différents (par exemple dans les classes pilotes belges on parle déjà d'axiomes avec les élèves âgés de 12 ans, au lycée cantonal de Lausanne, on introduit la notion d'axiomatique dans le deuxième cycle), et ce

n'est qu'après avoir terminé au moins un cycle de ces essais que leurs résultats pourraient être objectivement appréciés.

Néanmoins on peut formuler certaines idées directrices concernant l'organisation axiomatique des mathématiques de l'école secondaire, les idées basées sur les observations encore restreintes, mais significatives, sur la théorie pédagogique et sur la nature même du problème de l'initiation à la méthode axiomatique.

L'initiation à la méthode axiomatique ne peut se produire dans le vide ; il faut disposer ou d'une matière à axiomatiser, ou bien d'une matière à interpréter intuitivement la définition axiomatique a priori donnée ; il faut aussi disposer des outils indispensables à l'axiomatisation et à l'utilisation de l'axiomatique établie ou donnée a priori.

La matière dont nous venons de parler, c'est non seulement le monde d'expériences, d'observations, d'intuitions, de concepts demi-détachés de leurs sources concrètes, mais aussi des fragments de mathématiques déjà "localement organisés " (selon l'expression de H. Freudenthal), qui sont presque mûrs dans la pensée des élèves pour une synthèse plus globale ; les outils que nous avons mentionnés sont des structures les plus élémentaires, familières déjà à l'élève, le langage moderne, une certaine orientation intuitive dans les concepts logiques de base (définition, théorème, démonstration) élaborés au cours d'"organisations locales", ainsi qu'une habileté absolument nécessaire dans les opérations élémentaires, etc. C'est pourquoi l'initiation active à la méthode axiomatique ne doit pas être commencée trop tôt.

D'autre part, nous visons la méthode axiomatique en acte. Une méthode concerne toujours une activité. Croire que les élèves peuvent être initiés à la méthode axiomatique sans avoir appliqué cette méthode, c'est une illusion pédagogique. Couronner les mathématiques élémentaires par la révision des matières de l'enseignement dans la dernière classe visant leur organisation axiomatique a posteriori, serait revenir à la conception du XIXème siècle de l'axiomatisation conçue comme l'organisation logique d'une discipline déjà prête et presque morte. Nous voulons présenter aux élèves la méthode axiomatique comme le mécanisme utile et créateur de la pensée. C'est pourquoi l'initiation à la méthode axiomatique ne doit pas être commencée trop tard. Trouver le moment optimum, c'est une tâche très importante. Les expériences, encore restreintes, suggèrent que le moment le plus favorable se situerait vers l'âge de 15 ans, mais il faut encore attendre des résultats plus significatifs.

La deuxième question qui exige une analyse, c'est la forme de l'organisation axiomatique des matières de l'enseignement. Quelles axiomatiques ? Comment doivent-elles être rangées et en quels rapports mutuels introduites ? On prend en considération certaines axiomatiques algébriques (groupe, anneau, corps, espace vectoriel), une organisation axiomatique du domaine des nombres, ainsi que de la géométrie et celle des probabilités.

Il serait trop tôt encore pour répondre aux questions dont nous venons de parler ; nous attendons l'élaboration complète de certains projets englobant l'ensemble des matières de l'enseignement.

Le problème de l'initiation aux axiomatiques algébriques étant "les définitions véritables" pour la pensée naïve, est assez simple, comme nous l'avons déjà souligné. L'introduction de l'axiomatique de la théorie des probabilités étant prévue pour la dernière classe de l'école secondaire et précédée par la prise de connaissance des autres axiomatiques, ne provoquera peut-être pas formellement des difficultés particulièrement graves. Nous avons souligné l'expression "formellement", car il ne faut pas avoir l'illusion que la généralisation de la définition classique de la probabilité, acceptée même facilement par les élèves introduits précédemment aux éléments de l'analyse, conduira directement à la compréhension de la structure ainsi définie, les élèves ne connaissant que des exemples primitifs et simples des ensembles et n'ayant qu'une notion grossière de la mesure. Mais même si la pénétration plus profonde dans la théorie n'était pas possible, la construction de l'axiomatique en question et l'établissement de ses conséquences les plus importantes pour les applications statistiques seraient très instructifs.

N'ayant que des renseignements très restreints concernant les expériences dans ce domaine, je n'ai pas de base pour analyser plus profondément cette question, mais à mon avis, il vaudrait la peine de chercher les moyens pédagogiques en vue d'introduire sur une voie naturelle l'axiomatique des probabilités ; d'un côté - comme le constate avec justesse le programme de Dubrovnik - c'est "une excellente occasion pour démontrer comment on construit une théorie axiomatique", de l'autre côté, nous y trouvons aussi une occasion particulièrement favorable à la présentation juste des rapports de la théorie et de la pratique, de la méthode expérimentale et de la méthode axiomatique, dont la collaboration décide de l'omniprésence des mathématiques dans la culture d'aujourd'hui.

Le domaine des nombres et de la géométrie posent aussi des problèmes ouverts, le premier étant encore peu discuté, l'autre au contraire se trouvant au centre d'une âpre discussion.

En ce qui concerne la première question, les partisans de l'axiomatique des entiers naturels dans l'enseignement secondaire ne sont pas nombreux. Selon l'opinion la plus répandue, les opérations les plus importantes sur les ensembles et celles sur les entiers naturels doivent être traitées comme éléments de base, élaborés intuitivement et organisés localement (déductions locales). La discussion principale concerne le degré de la précision des constructions successives qui conduisent par paliers à la notion du corps des réels. Le passage d'un palier à un autre devrait contenir :

a) la motivation de l'élargissement de l'ensemble des nombres déjà connus,

b) la définition et les opérations sur des nombres nouveaux et la caractéristique algébrique de cette structure, ce qui n'est rien d'autre que l'axiomatisation de cette structure,

c) l'identification de l'ensemble utilisé à présent avec un sous-ensemble de l'ensemble défini, à l'aide de l'isomorphisme établi.

Etant donné que ce programme devrait être réalisé à l'école primaire et dans le premier cycle de l'école secondaire avec des élèves âgés de 12 à 15 ans, il ne nous semble pas possible de dépasser dans les constructions successives, le niveau d'une esquisse encore intuitive et organisée déductivement seulement dans certains fragments. On ne doit pas oublier qu'il faut non seulement rendre les élèves conscients des propriétés algébriques des opérations et des structures algébriques, qu'on élargit pas à pas, mais aussi qu'ils doivent acquérir une habileté nécessaire dans les calculs élémentaires.

Les voies conduisant à une esquisse de la notion du nombre réel peuvent être différentes. Mais indépendamment de la voie utilisée, la synthèse finale exprimée dans une axiomatique du corps des réels apparaît nécessaire. Cette axiomatique pourrait être formulée comme une des bases des mathématiques du deuxième cycle (l'idée sous-jacente au projet du programme pour la première classe du lycée en Pologne). En utilisant le langage familier aux élèves, on mettrait en évidence la structure du corps commutatif, complètement ordonné et continu des réels, contenant le sous-corps des rationnels, et l'anneau des entiers. Dès ce moment, les opérations sur les nombres devraient être strictement rapportées à l'axiomatique établie en tant que compte-rendu transformé dans la définition d'une structure.

L'organisation axiomatique de la géométrie se trouve encore au centre du débat. Nous y trouvons d'un côté des propositions très intéressantes mais qui s'opposent à la présentation axiomatique ou qui passent sous silence ce problème. D'autre part, on a élaboré déjà beaucoup de systèmes axiomatiques de la géométrie à l'usage de l'enseignement secondaire.

Nous ne pouvons dans cette étude que mentionner les idées les plus typiques.

Des solutions de trois types sont proposées :

a) la géométrie englobée dans l'algèbre
b) la géométrie englobée dans l'étude du corps des réels,
c) la géométrie indépendante mais non isolée ni de l'algèbre, ni de l'étude du corps des réels et conçue comme une structure-carrefour particulière.

A la base de la discussion concernant tous ces systèmes, se trouve la notion de la "mathématique élémentaire unitaire". Ce qui est indiscutable, c'est le fondement ensembliste de l'enseignement des mathématiques élémentaires, admis sans restriction dans toutes les conceptions modernes. Elles diffèrent dans l'interprétation du terme "unitaire" en ce qui concerne la construction des mathématiques destinées aux élèves âgés de 15 ans et plus. La conception d'un seul courant algébrique et la conception de deux courants (l'algèbre et la topologie dans la forme de l'espace métrique euclidien) qui découlant indépendamment de la base ensembliste, se croisent néanmoins plusieurs fois et qui se fondent finalement dans l'étude des éléments de l'analyse et dans celle des probabilités).

VI. Quelques problèmes de la pédagogie du développement de la théorie axiomatique.

La construction axiomatique du cours ne s'explique pas par elle-même mais elle exige des démarches pédagogiques très perspicaces pour que la méthode puisse fonctionner. Ce qui est important avant tout, c'est la compréhension du sens méthodologique a) de la définition, b) du théorème, c) de la démonstration.

La compréhension du rôle méthodologique de la définition c'est, selon nos expériences, la clef ouvrant la porte à la compréhension de la construction d'ensemble, car le raisonnement déductif correct exige en premier lieu l'utilisation disciplinée des définitions, y compris l'axiomatique comme définition de base. Le manque de cette discipline chez les élèves se révèle de manière différente. Par exemple, les difficultés et les malentendus observés dans l'enseignement traditionnel de la géométrie déductive découlent en grande partie de l'incompréhension du sens méthodologique de la définition, les élèves ne se rapportant pas aux caractères exprimés dans la définition, mais à une image intuitive d'ensemble dépassant la lettre du texte définissant. Nos recherches ont prouvé que les élèves n'utilisent pas consciemment les définitions.

Si nous revenons ici à ces questions bien connues de chaque enseignant, nous voulons souligner que l'utilisation familière mais disciplinée de la définition au sein d'une organisation axiomatique du cours doit être l'objet de démarches pédagogiques particulièrement perspicaces. Ces démarches

concerneront par exemple l'interprétation formelle et intuitive de la définition en tant qu'équivalence, l'analyse des conditions définissantes et la mise en relief du sens de chacune de ces conditions à part, à la lumière des contre-exemples, l'organisation permanente et la réorganisation permanente des notions introduites, visant leurs classifications et leurs rapports mutuels, révélés continuellement par les théorèmes et les définitions nouvelles, prise de conscience de l'équivalence des définitions et l'utilisation effective de cette équivalence, etc.

Tout cela exige beaucoup de temps, c'est pourquoi on ne peut pas avancer dans la théorie axiomatique trop rapidement, malgré la construction moderne qui est évidemment particulièrement favorable à l'accélération du procédé, ce qui peut néanmoins provoquer des illusions pédagogiques nocives.

Des remarques analogues concernent les théorèmes et leurs démonstrations. Ce qui est nécessaire avant tout, c'est l'approfondissement systématique et permanent de la notion même de la démonstration d'un côté, et de l'établissement d'une stratégie de la démonstration de l'autre. Le problème se révèle sous deux aspects :

1. la compréhension du sens méthodologique de la démonstration et celle du critère de la vérification au sein de la théorie axiomatique sont les conditions " sine qua non" pour l'initiation à la méthode axiomatique,

2. la démonstration joue un rôle extrêmement important dans la compréhension des notions définies, ainsi que dans celle du contenu des théorèmes.

Beaucoup de définitions ne sont bien comprises qu'au cours de leur application dans le raisonnement ; beaucoup de théorèmes sont mieux compris à la lumière de leur démonstration, ou même ne sont compris qu'à la lumière de leur démonstration.

La pédagogie de la démonstration, au même degré que celle de la définition pose des problèmes nouveaux qui attendent encore une solution moderne.

VII. Problème de la rigueur.

Les considérations concernant l'initiation à la méthode axiomatique ne peuvent passer sous silence le problème de la rigueur. Trois aspects exigent une analyse pédagogique : la précision dans la formulation des définitions, des théorèmes et des démonstrations, donc la précision du langage ; la rigueur dans les raisonnements ; la conséquence dans le développement axiomatique de la théorie. Nous allons discuter ces problèmes tour à tour.

La réaction à l'imprécision des définitions et aux pseudo-démonstrations connues de l'enseignement traditionnel, cette réaction juste et néces-

saire, apporte néanmoins, aussi le péril imminent de l'autre extrémité: l'obsession par l'esprit formel, la fascination par la rigueur logique, l'identification de la pensée axiomatique avec la pensée formaliste. On rencontre parfois des néophytes obsédés par la peur d'un péché d'imprécision dans leur enseignement.

Le danger est imminent. Le professeur moyen même à l'esprit moderne, ne peut avoir les perspectives scientifiques accessibles à un chercheur ; il réalise les tendances modernes sur un terrain restreint et limité et il peut facilement -bon gré, mal gré - réduire une idée méthodologique créatrice à des détails traités d'une manière exagérée. C'est pourquoi, à la base de toutes nos démarches pédagogiques, il nous faut poser comme un garde-fou le principe suivant : nous ne devons pas être "plus catholiques que le pape", donc plus "purs" dans notre enseignement, que ne le sont les mathématiciens dans leur pratique quotidienne habituelle. Ce principe entraîne - ce qui peut paraître paradoxal - une conception modérée de la rigueur dans l'initiation des élèves à la méthode axiomatique.

Ce qui est exigé avant tout, c'est la précision dans la formulation des définitions et des théorèmes, la précision qui pourrait être comprise et acceptée consciemment par l'élève moyen. C'est pourquoi il faut trouver des moyens d'expression qui, tout en conservant le sens mathématiquement correct, ne sont point dépourvus du reflet des images intuitives, de couleurs vives de la langue usuelle. Certains abus de langage consciemment acceptés en classe, certaines conventions simplificatrices introduites manifestement, l'utilisation des schémas graphiques et des symboles ayant souvent le caractère de "signalisation routière", peuvent alléger la manière de s'exprimer sans renoncement à la correction essentielle, ce qui est applique aussi dans la pratique quotidienne des mathématiciens.

La question consiste donc dans l'élaboration d'un optimum de la précision du langage dans l'enseignement des mathématiques. Le langage moderne facilite la description verbale, car il permet d'utiliser des termes désignant brièvement les structures, inconnues dans l'enseignement traditionnel. On voit cela par exemple dans la formulation des axiomatiques modernes. Mais le langage moderne, élaboré à l'usage de l'enseignement du point de vue del'optimum pédagogique, se trouve encore peu fixé. Le langage traditionnel est un fait historique, résultant d'une évolution ; le changement de ce langage serait un nouveau fait historique établi par un coup d'Etat. Mais cette révolution ne peut pas consister dans le transport direct du langage des traités mathématiques dans les manuels scolaires ; elle exige un grand travail pédagogique, basé sur des expériences concrètes.

Toutes ces démarches exigent du temps, le développement de la théorie axiomatique dans l'enseignement ne peut donc pas être rapide. Dans l'enseignement, ce développement n'est pas seulement un exposé d'un fragment de la théorie prête, c'est avant tout l'initiation à la méthode de la véritable action intellectuelle. De plus, au cours de ce développement, il faut créer des moments de relâche, de réflexion sur la voie déjà passée, des organisations locales au sein d'une organisation globale. Au profit de ces démarches, il faudrait peut-être renoncer, de temps en temps, à une démonstration. Trois situations peuvent trouver leur place dans la réalisation du cours organisé en principe axiomatiquement : a) les démonstrations "complètes", b) les esquisses de démonstrations, c) omission manifeste de la démonstration avec l'information donnée par le professeur. Le premier et le second groupes peuvent contenir, à leur tour, les démonstrations ou leurs esquisses élaborées par les élèves mêmes et les démonstrations, dont la connaissance serait prise d'après l'exposé d'un élève ou du professeur ou d'après la lecture.

Toutes ces formes existent dans la pratique du mathématicien professionnel. Il lui serait impossible, en particulier, d'entrer en détails dans les démonstrations de tous les théorèmes qu'il utilise et en plus d'"apprendre" toutes ces démonstrations de la manière exigée de l'élève. Il arrive donc qu'il ne connaît qu'une esquisse du raisonnement en question, il arrive aussi qu'il se contente d'une information ou d'un communiqué. Il n'y a pas de raison d'appliquer, dans l'enseignement, un régime plus rigoureux. Il faut accepter que certains fragments d'une théorie axiomatique puissent et doivent être présentés aux élèves sous la forme d'un renseignement, que certaines démonstrations peuvent être omises ou seulement esquissées - sous réserve que les situations soient absolument claires ; les élèves doivent être conscients qu'on s'est résigné à présenter ou à chercher la démonstration en jeu, mais que le théorème exige une démonstration qui a été déjà établie par les mathématiciens ; l'élève doit aussi être conscient qu'on ne lui a présenté qu'une idée-pilote d'une démonstration, et doit distinguer le projet d'une démonstration d'une démonstration "complète".

Evidemment, on pourrait mettre en doute ce postulat, étant donné que le raisonnement non formalisé -même très subtil- n'est qu'une esquisse d'une démonstration (c'est pourquoi nous avons mis entre guillemets l'expression "complète"). Mais les démonstrations non formalisées, considérées comme "complètes", c'est la pratique quotidienne du mathématicien se contentant de la précision-optimum qui est la fonction de beaucoup d'aspects différents et qui n'est définie qu'approximativement par le bon sens et une certaine "honnêteté" de l'esprit mathéma-

tique d'un côté et par l'expérience mathématique personnelle et sociale de l'autre. La même situation a lieu à l'école, la précision-optimum ne pouvant pas être définie a priori d'une manière absolue, mais étant réglée dans les situations concrètes par le bon sens, par une certaine honnêté mathématique et pédagogique, ainsi que par l'expérience. Il est par exemple "honnête" de laisser certaines lacunes dans une démonstration, qui pourraient être facilement complétées par les élèves mêmes, mais il n'est pas "honnête" de masquer les lacunes graves impossibles à combler en classe, il est "honnête" au contraire de laisser ces lacunes, en expliquant franchement aux élèves la raison de cette omission. Par certains fragments du cours ayant le caractère de renseignement, on économise le temps nécessaire à l'apprentissage de la méthode.

VIII. Confrontation : la conception traditionnelle et la conception moderne de la méthode axiomatique dans l'enseignement.

Selon notre programme esquissé au début, il faut maintenant essayer de se rendre compte des difficultés observées dans l'enseignement traditionnel concernant la notion de la théorie axiomatique et de leurs sources. Nous voulons mettre en évidence les difficultés découlant de la présentation erronée des idées en jeu, donc celles qui n'auront pas lieu dans la présentation moderne, ainsi que des difficultés plus profondes, donc celles qui doivent aussi être prises en considération dans la conception moderne.

Les essais de l'initiation des élèves à la méthode axiomatique dans l'enseignement traditionnel ne concernaient et ne concernent aujourd'hui que la géométrie élémentaire. Cette situation n'est pas favorable au développement correct dans la pensée de l'élève des idées méthodologiques en question pour beaucoup de raisons, dont les quatre suivantes nous semblent être particulièrement décisives.

a) L'élève ne connaissant pas de procédés pareils dans les autres domaines des mathématiques scolaires aboutit à la conviction profonde que la construction déductive est nécessairement liée à la géométrie, que ce n'est que "la méthode géométrique".

b) On s'efforce d'introduire la notion de l'axiomatique à l'aide d'un exemple concernant un domaine peu favorable à cette entreprise. L'axiomatique classique de la géométrie est compliquée et difficile à exprimer d'une manière simple, concise et précise, d'autant plus que l'enseignement traditionnel n'utilise que très peu de symboles et ne tire pas profit du langage ensembliste simplificateur.

c) De plus, cette axiomatique compliquée et unique dans l'enseignement traditionnel concerne une structure profondément enracinée dans le concret et recherchée avec l'utilisation d'une technique évidemment nécessaire et ayant des valeurs éducatives multiples, mais singulièrement favorable à l'embrouillage des aspects intuitifs et formels (dessins et modèles géométriques). Dans cette situation, la méthodologie de la géométrie peut apparaître dans la conscience de l'élève moyen comme artificielle et équivoque.

d) Enfin, il faut aussi souligner que la présentation de la notion de l'axiomatique et du sens de la démonstration au sein de la théorie axiomatique n'est pas correcte ; elle introduit a priori des malentendus essentiels. L'existence de malentendus pédagogiques et mathématiques dans l'enseignement de la géométrie traditionnelle se révèle dans la recherche obstinée de moyens pédagogiques qui pourraient "convaincre" l'élève de "la nécessité" de la vérification déductive des théorèmes.

La place même attribuée à cette question dans les travaux méthodologiques prouve que la situation n'est pas naturelle, que le raisonnement déductif apparaît à l'élève comme un procédé imposé de l'extérieur ("on procède ainsi en mathématiques"). L'analyse des suggestions typiques visant la motivation de la méthode révèle que les malentendus sont encore plus profonds.

Nous n'allons pas discuter ici en détails ces "prescriptions" et ces "motivations" typiques, nous limitant seulement à des remarques générales, concernant trois groupes, le plus souvent formulées.

Celles du premier groupe -indépendamment des positions méthodologiques et philosophiques de leurs auteurs - ce qui est significatif, s'efforcent d'ébranler la confiance de l'élève dans ses conceptions basées sur l'expérience et l'observation en géométrie, et de mettre en évidence "la supériorité du raisonnement sur l'expérience". Cette argumentation n'est qu'un faux-fuyant évident, utilisé pour se tirer d'embarras pédagogique très gênant. Dans cet ordre d'idées, nous trouvons par exemple "la prescription des illusions" : on présente à l'élève un dessin provoquant une illusion visuelle ; il contrôle cette observation par exemple par la mesure, en constatant avec étonnement que le dessin l'a trompé, d'où la conclusion : le raisonnement est supérieur à l'expérience. Cette conclusion est un faux-fuyant évident, étant donné que l'élève a découvert sa faute à l'aide de la mesure ! Et il ne pourrait corriger autrement son illusion d'optique.

Un autre exemple frappant de malentendu de ce genre est "la prescription des sophismes". On esquisse par exemple un triangle abc non

isocèle, ainsi que l'axe de symétrie de ab et la bissectrice de $\widehat{acb}$ de telle manière que leur point d'intersection se trouve à l'intérieur du triangle (dessin faussé) ce qui permet de "démontrer" que le triangle est isocèle. On tire "la conclusion" : le dessin nous a trompés, il faut raisonner indépendamment du dessin. Cette "conclusion" pourrait être mise en doute immédiatement par un élève capable de s'opposer à l'autorité de son professeur, car il suffirait d'établir le dessin avec précision pour éviter le malentendu en question ; la seule conclusion naturelle serait donc : il faut dessiner exactement.

Une autre "prescription" met l'accent sur les faiblesses de l'expérience : il serait impossible de vérifier le théorème en question dans "toutes les figures possibles", la mesure ne donne que des résultats approximatifs, les constructions sont inexactes, etc. D'où la conclusion "le raisonnement est supérieur à l'expérience". Voilà un nouveau faux-fuyant ! Si la méthode expérimentale consistait dans la vérification de tous les cas possibles, si on ne pouvait pas faire des généralisations à la base des mesures approximatives, les sciences expérimentales n'existeraient pas ! L'argumentation - dont nous venons de parler - est un faux-fuyant, car on tâche de se tirer d'affaire sans mettre en évidence ce qui est ici uniquement valable : l'objet de la recherche mathématique, le schéma abstrait qui ne peut pas être étudié expérimentalement en raison même de son caractère.

Les suggestions du deuxième groupe essaient de se rapporter justement à cet objet ; on discerne donc strictement dès le commencement "la figure pensée" de la "figure dessinée" et de "l'objet ayant la forme de cette figure" ainsi que "l'opération pensée" de "l'opération concrète (dessin)", et on postule pour mettre en évidence, dès le commencement, les figures et les opérations pensées comme des objets propres de l'étude. Dans cette situation il est plus facile d'établir chez les débutants un concept de la vérification "par raisonnement". Mais il serait illusoire d'identifier ce concept avec la notion d'une démonstration au sein d'une théorie axiomatique. Pour l'élève moyen "démontrer" c'est "convaincre" et pour convaincre une "personne raisonnable" il suffit de montrer que ce qui apparaissait non évident est évident à la lumière du raisonnement. Pour acquérir ce résultat, il suffit de réduire le théorème à une prémisse intuitive ; réduire par force tout aux axiomes est une bizarrerie.

A cette interprétation spontanée de la démonstration se rapportent "les prescriptions" et les "motivations" du troisième groupe. On met en relief dans la discussion avec l'élève le moment social : la relativité de l'évidence. Le professeur joue au commencement le rôle de l'adversaire par principe. Par la suite, les élèves s'engagent pas à pas dans ce combat intellectuel ; certains parmi eux prennent goût à ce

combat et ils deviennent assez vite des incrédules par principe, qui "cherchent midi à quatorze heures". Peu à peu, celui qui démontre et qui doit se défendre entreprend un dialogue avec lui-même. La discussion avec autrui se transforme par l'intériorisation dans le raisonnement de plus en plus précis, les élèves s'habituent à la méthode. Mais il ne faut pas avoir de nouveau d'illusions : s'habituer à un certain procédé et comprendre le sens méthodologique de ce procédé, ce n'est pas la même chose, ce que prouvent, d'une manière absolument convaincante, les résultats de nos recherches : les élèves, même ceux des classes supérieures, ont deux concepts différents de la "vérité" en géométrie, et deux concepts différents de la démonstration : le naturel et le scolaire (exigé par le programme, comme l'a constaté un élève âgé de 15 ans).

La présentation traditionnelle de la méthode n'est pas favorable à éliminer cette dualité.

L'analyse des manuels ainsi que des autres travaux consacrés à la méthodologie de l'enseignement traditionnel des mathématiques nous permet d'établir une classification des conceptions les plus fréquentes présentées aux élèves en liaison avec "la méthode déductive". Commençons par les explications typiques :

I. Evidence a priori.

a) les notions fondamentales - les notions entièrement claires que nous ne pouvons pas définir ; les axiomes - les théorèmes tout à fait évidents, que nous ne pouvons pas démontrer.

b) les notions primitives - les notions si simples qu'elles n'exigent aucune définition ; les axiomes - les théorèmes si évidents qu'ils n'exigent aucune démonstration.

II. Evidence basée sur l'expérience.

Les notions primitives - les notions reflétant certains objets existant dans l'espace réel ; les axiomes - les propositions simples, basées sur des observations qui répétées continuellement se sont gravées dans la pensée plus fortement que les autres.

III. Méthode et ordre logique.

On ne peut pas expliquer le sens d'une notion sans se rapporter à une autre notion ; on ne peut pas démontrer un théorème sans se baser sur d'autres théorèmes. En vue d'éviter le "regressum ad infinitum" ou le "circulus vitiosus" il faut admettre certaines notions sans défini-

tion, comme primitives et certains théorèmes sans démonstration, comme axiomes. En ce qui concerne le choix de ce fondement, on indique le plus souvent le choix libre, mais prenant en considération l'évidence basée sur l'expérience ou sur la représentation intuitive ; plus rarement on met en relief le choix défini par la simplicité et la commodité dans le développement de la théorie ; il arrive aussi qu'on revient à l'idée de la simplicité préexistante même dans les manuels récents.

IV. Définition implicite.

a) Les axiomes - les propositions admises sans démonstration exprimant les propriétés caractéristiques des notions primitives, dont nous ne connaissons rien d'autre.

b) Les axiomes - les informations les plus importantes, sans lesquelles il nous serait impossible d'utiliser les notions primitives.

Les explications précitées reflètent évidemment les étapes différentes du développement de la notion de la méthode axiomatique. Dans l'interprétation I, il se reflète la conception idéaliste de Proclos, dans l'interprétation II, la conception réaliste de Pasch/[1]. Selon la doctrine de Proclos, les axiomes et les postulats sont plus clairs que les théorèmes déduits, dépourvus de cette clarté. Deux mille ans après Proclos, M. Pasch écrit concernant les notions primitives : "Die Kernbegriffe wurden nicht definiert, keine Erklärung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschliesst nämlich den Hinweis auf geeignete Naturgegenstände (p. 15).

Concernant les axiomes : "Kernsätze gründen sich auf Beobachtungen die sich unaufhörlich wiederholt und sich fester eingeprägt haben als Beobachtungen anderer Art (p. 16).

Concernant la certitude : "Die Unanfechtbarkeit der Beweise, durch die Lehrzätze auf die Kernsätze zurückgeführt werden im Verein mit der Evidenz der Kernzätze selbst, die durch einfachen Erfahrungen verbürgt sein sollen gibt der Mathematik den Charakter höchster Zuverlässigkeit, der man ihr zuzuschreiben pflegt" (p. 92).

Ces deux conceptions se sont reflétées et se reflètent encore dans l'enseignement traditionnel et dans son langage, où on utilise le terme "évident", dans le sens de la doctrine idéaliste de Proclos, ou dans le sens de la conception réaliste de Pasch, la notion embrouillée d'éviden-

1. M. Pasch und M. Dehn : Vorlesungen über neuere Geometrie, v. Springer, Berlin, 1926.

ce étant la source de beaucoup de malentendus. Pour l'élève, la plupart des théorèmes démontrés ne sont pas moins évidents (et il arrive qu'ils sont plus évidents) que les axiomes mêmes ; les axiomes ne sont pas plus directement suggérés par l'expérience que les autres théorèmes. Dans cette situation, l'explication du sens de l'axiomatique, basée sur l'évidence, ne peut pas être compréhensible. La question de savoir pourquoi il faut démontrer les théorèmes évidents, pourquoi on ne doit utiliser, dans les raisonnements, que les propriétés exprimées dans les définitions, etc. ne peut donc pas y trouver une réponse qui serait traitée comme raisonnable par l'élève moyen.

Si nous comparons la conception pseudoréaliste, vulgarisant le programme de M. Pasch, avec la notion de l'axiomatique conçue comme la définition d'une structure, nous voyons que la conception moderne est plus favorable à la présentation correcte aux élèves des rapports mutuels de l'expérience et de la pensée abstraite en géométrie. Dans l'explication "pseudo-réaliste" on masque le fait que, si les axiomes de la géométrie reflètent nos expériences concernant l'espace réel, ce n'est pas un reflet mécanique se réalisant indépendemment de l'activité organisatrice de la pensée humaine, stimulée par les problèmes réels qu'elle doit résoudre incessamment.

La conception moderne de la structure est la plus proche de la réalité. Si dès le commencement au cours de la "synthèse inductive", on pouvait rendre l'élève conscient de cette opération de la schématisation extrapolante et transmutante des données réelles dans le schéma abstrait il comprendrait mieux l'objet de son étude en géométrie et la méthode axiomatique.

L'explication III s'efforce de mettre en évidence la caractère hypothético-déductif de la géométrie. Mais si ce caractère peut être saisi par le débutant facilement localement, il n'en est pas de même dans la théorie d'ensemble. L'explication IV vise la définition implicite, mais cette conception n'est pas et ne peut pas être réalisée avec conséquence dans l'enseignement de la géométrie classique. On dit "les axiomes sont des propositions admises sans démonstration exprimant les propriétés caractéristiques des notions primitives dont nous ne connaissons rien d'autre, "mais on utilise dès le commencement des dessins et des modèles de la manière dépassant leur rôle symbolique. L'expression "dont nous ne connaissons rien d'autre" se trouve en contradiction avec le procédé même, se rapportant continuellement aux observations, aux images, aux intuitions spéciales.

En mentionnant les quatre sources précitées des difficultées dans la géométrie déductive traditionnelle, j'ai eu conscience de n'avoir esquissé que certains aspects choisis du problème seulement ; néanmoins

il me semble que cet aperçu -même si superficiel et tronqué- nous permet de formuler des conclusions qui seraient peut-être utiles au cours de l'élaboration de la pédagogie nouvelle de la méthode axiomatique.

a) La méthode axiomatique devrait être introduite selon l'exemple de l'axiomatique simple, polyvalente, ayant des modèles familiers aux élèves ; les rôles de la définition, du théorème et de la démonstration dans la construction axiomatique d'ensemble pourraient y être mis en évidence sans malentendu.

b) Il faudrait trouver des moyens pour présenter l'axiomatique comme définition d'une structure étant l'objet propre de l'étude conçue comme recherche et description de plus en plus détaillée de cette structure ; cette structure possède certaines propriétés exprimées dans les théorèmes. Le critère formel de la vérification serait, dans cette situation, uniquement acceptable ; le rapport du concret, dont cette structure a été issue, et de son caractère abstrait pourrait être présenté clairement et correctement.

c) Les théories plus compliquées ou plus enracinées dans le concret - comme la géométrie - pourraient être étudiées axiomatiquement par la suite, les élèves étant précédemment initiés à la méthode au moyen d'un exemple plus simple et connaissant déjà certaines structures élémentaires nécessaires pour la structuration moderne d'un domaine intuitivement familier.

Concernant la géométrie, je suis d'avis qu'un équilibre des structures topologiques et algébriques utilisées dans la description de l'espace classique, ainsi que l'équilibre "des raisonnements basés sur les calculs algébriques" et "des raisonnements qualitatifs" doit être assuré avec une précaution pédagogique profonde.

Résumé of the article

AXIOMATICS AND AXIOMATIZATION IN SECONDARY EDUCATION

A. Z. Krygowska

The article is concerned with the pedagogical problems arising from an attempt to treat the axiomatic method as a tool of thought in the classroom. It is concerned with the three main aspects of training in thinking namely, axiomatization, deduction and interpretation.

The starting point is the modern conception of the axiomatic approach conceived as the definition of a structure. The author explains the intuitive sense of the notions of structure and of axiomatics, as well as the pedagogical consequences arising from this conception. Consequently, various aspects of the process of axiomatization are illustrated by examples based upon the student's experience. The notion of directed axiomatization in class and its pedagogical analysis are particularly stressed. The necessity of preparing for the axiomatic method by the organization of courses in the primary classes as well as in the lower classes of the secondary schools are stressed. The problems concerning the organization of the courses, of the pedagogy of the development and of the axiomatic approach and the degree of rigour are extensively discussed. The final chapter is devoted to a comparison of the traditional conception of the deductive method in geometry and of the axiomatic method in the sense used in modern science. This comparison brings out the difficulties observed in traditional teaching arising from the erroneous presentation of the notions in question.

The author ends her work by giving her opinions on the conditions which favour the training of students in the axiomatic process, understood as the proper method of thinking in mathematics.

LA GEOMETRIE DANS L'ENSEIGNEMENT MODERNE DE LA MATHEMATIQUE

G. Papy

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le problème de l'enseignement :

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.

2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.

3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter : ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste :

ESPACES VECTORIELS

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires ?

Gustave CHOQUET a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne!

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe ... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif ... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

o

o o

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6ème (12-13 ans), j'ai pris une classe de 3ème scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat ... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!

2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.

3. Ensembles, relations, groupes ... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

o

o o

CLASSE DE SIXIEME (12-13 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min)(1)
===================

(1) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomadaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l'expérience dans des classes à quatre périodes.

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte - et ont pris leur temps pour cet enseignement - ont pu constater, les années ultérieures, que

les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient meme partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y <u>voit</u> les réponses sans <u>raisonner.</u> On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de Venn ([MM1] pp 68 - 71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM1] pp 73 - 75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe Π_0, + qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démons-

trations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de Thalès. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM1] p 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

CLASSE DE CINQUIEME (13-14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici est qu'il existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de 13 à 14 ans.

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1] , petit ouvrage destiné aux enseignants, ou à [MM2] , manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développement du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus en plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours culmine par la mise en évidence de cette structure et se termine par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

CLASSE DE QUATRIEME (14-15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

"Le cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie". Encore convient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sous-entend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwartz et inégalité triangulaire.

Le cours <u>culmine</u> par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se <u>termine</u> par son utilisation systématique.

CLASSE DE TROISIEME SCIENTIFIQUE (15-16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la

structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base:

Si un vectoriel admet une base de n éléments
Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les subtitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des classes de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure: il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de Pythagore. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5ème et 4ème, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des élé-

STATE INSTITUTE OF EDUCATION BANIPUR

ments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices R^{2x2}, +, .) et le groupe linéaire général (voir [A7] , Ch 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connaît déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux deux quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ(ou corps commutatif).

Une des manières d'orienter le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe a + bi. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D1] de Jean Dieudonné écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

1. [A] ARTIN : - Geometric Algebra
(Interscience Publishers, New York 1957)
: - Algèbre Géométrique
(Gauthier-Villars, 1962)

2. [D1] DIEUDONNE : - Foundations of Modern Analysis
(Academic Press Inc., New York 1960)
: - Fondements de l'Analyse Moderne
Gauthier-Villars, Paris 1963)

3. [D2] DIEUDONNE : - Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire
(Herman, Paris 1964)

4. [G] PAPY : - Groupes
(Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Dunod, Paris 1961)
: - Groups
(Macmillan, London 1964)
: - I Gruppi
(Feltrinelli Editore, Milano, 1964)

5. [EE] PAPY : - Erste Elementen der Moderne Mathematik
(Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg 1962 - 1963)

6. [F1] PAPY-DEBBAUT : - Géometrie affine plane et nombres réels
(Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Gauthier-Villars, Paris 1962)
- Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen
(Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

7. [F2] PAPY : - Initiation aux Espaces Vectoriels
(Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Gauthier-Villars, Paris 1963)
- Einführung in die Vectorraumlehre
(Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

8. [MM1] PAPY : - Mathématique Moderne 1
(Editions Didier - Bruxelles - Paris 1963
: - Moderne Wiskunde 1
(Didier, Bruxelles - Paris 1965)
: - Matematica Moderna 1
(Editura Tineretului, Bucuresti 1965)
: - Modern Mathematics 1
(Collier-Macmillan, London - New York 1965

9. [MM2] PAPY : - Mathématique Moderne 2
(Didier - Bruxelles, Paris 1965)

10. [A7] PAPY (avec la collaboration des Assistants du C. B. P. M.)
: - Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan.
(Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique - 183, avenue Brugmann, Bruxelles 6).

11. [GP] PAPY : - Géométrie Plane
(Labor, Bruxelles - Nathan, Paris 1966)

12. [MM3] PAPY : - Mathématique Moderne 3
(Didier - Bruxelles, Paris 1966).

ARTICLES

13. PAPY : - Introduction aux espaces vectoriels
(La math. du 20e siècle. Vol. II - Bruxelles 1961 - 33 pages).

14. PAPY : - Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire
(Mathématique moderne, OCDE, Athènes 1963).
: - Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna.
(Elementos n°9, Nov. Dic. 1964, pp 73-80 n°10 En. Feb. 1965 pp 99-104, n°11 Mar. Abr. 1965 pp 127-130).

: - Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools. (The Mathematics Teacher - Vol. LVIII n° 4 April 1965 pp 345-352, n° 5 May 1965 pp 448-453).

15. PAPY : - Comment introduire les notions d'ensembles et de relations (Publications de l'Unesco).

16. PAPY : - L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans. (Publications de l'Unesco).

Centre Belge de Pédagogie
de la Mathématique

PROGRAMME DE MATHEMATIQUE
POUR LES CLASSES DE 6è, 5è et 4è

CLASSE DE SIXIEME
(12 à 13 ans)

A. ENSEMBLES

1. Ensembles

Exemples - éléments d'un ensemble - représentation par les diagrammes de Venn - ensemble vide - ensemble comprenant un seul élément.

Termes et objets - égalité.

Les symboles $=, \in, \emptyset$; la notation $E = \{x \mid P(x)\}$ et ses variantes.

2. Parties d'un ensemble

Parties ou sous-ensembles d'un ensemble.
Inclusion - les symboles $\subset, \supset$.
Ensemble des parties de certains ensembles.

3. Algèbre des ensembles

Intersection - Réunion - Différence (facultativement la différence symétrique).
Commutativité et associativité de $\cup$ et de $\cap$.
Distributivités mutuelles de $\cap$ et de $\cup$.
(Quelques "contre-exemples" : non associativité de $\setminus$; situations relatives de $\setminus$ et de $\cup$).

4. Partition

Exemples de partitions d'un ensemble - définition.

B. RELATIONS ET GRAPHES

5. Relations et graphes

Nombreux exemples de relations.
Graphe d'une relation.
Les relations regardées comme ensembles de couples.
Relation de l'ensemble A vers l'ensemble B.
Le produit A x B.
Réciproque d'une relation.
Image d'un ensemble par une relation.
Propriétés relatives de X, $\cap$, $\cup$.

6. Propriétés de certaines relations.
Réflexivité - symétrie - transitivité - antisymétrie.

7. Composition des relations
Associativité de la composition - réciproque d'une composée.

8. Fonctions.
Fonctions - applications - bijections - composition de fonctions - transformations et permutations d'un ensemble.
(Facultativement, injections et surjections).

9. Equivalence
Equivalence et partition.

10. Ordre
Ordre - ordre total.
Les symboles $<$, $>$

C. NOMBRES ENTIERS RATIONNELS

11. Entiers Naturels
Ensembles équipotents - cardinal d'un ensemble (notions très élémentaires).
Ensembles finis et ensembles infinis.
Nombres naturels: cardinaux des ensembles finis.
Problèmes relatifs au cardinal de la réunion, de l'intersection et du produit d'un couple d'ensembles.
Recherche de la définition de l'addition et de la multiplication des entiers naturels à partir des opérations ensemblistes.
Eclairer et justifier les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication à partir des propriétés ensemblistes.

12. Systèmes de numération
Numération binaire et numération décimale.

13. Etude élémentaire de Z, +, .

Propriétés élémentaires de Z, +, ., notamment les produits remarquables.
Equations dans Z, +
Exercices de calcul numérique et littéral.

D. GEOMETRIE

14. Plan - point - droite

Le plan, ensemble infini de points.
Les droites, parties propres du plan.
Ensemble des droites du plan.
Propriétés d'incidence - utilisation des diagrammes de Venn.
Parallélisme - le symbole $\parallel$.
La direction d'une droite, partition du plan.

15. Parallèles et perpendiculaires

Droites et directions perpendiculaires - le symbole $\perp$.
Relations entre $\perp$ et $\parallel$.

16. Droites orientées

Les deux ordres totaux réciproques de toute droite.
Orientation des droites.
Demi-droites ouvertes et demi-droites fermées.
Segments ouverts, segments fermés, segments semi-ouverts.
Recherche de la définition des ensembles convexes.

17. Projections parallèles.

Projection parallèle du plan sur une droite.
Image d'une partie du plan par une projection.
Projection parallèle d'une droite A sur une droite B.
La projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est croissante et décroissante.
Cas particulier de la projection d'une droite orientée sur une droite parallèle orientée.
Droites parallèles orientées de même sens ou de sens opposé.

18. Equipollence et translations

Couples équipollents.
L'équipollence est une équivalence.
Projection de couples équipollents - petit théorème de Thalès.
Milieu d'un segment - théorèmes du parallélogramme.
Propriétés des équipollences - croisement des équipollences.
Translations ou vecteurs.
Images de parties du plan par une translation.
Images de droites, de demi-droites, de segments et de couples de points par une translation.

CLASSE DE CINQUIEME
(13 à 14 ans)

1. Le groupe des translations ou vecteurs.
   Composition des translations.
   Le groupe commutatif des translations du plan.
   Traduction en notations vectorielles additives.
   Premiers éléments de calcul vectoriel.

2. Le groupe Π_o, +
   Nouvelle représentation du groupe des translations ou du groupe des vecteurs.
   Sous-groupes de Π_o, +
   Somme de parties de Π_o, +
   Calcul dans Π_o, + - Equations - Problèmes.

3. Le groupe totalement ordonné D_o , +
   Toute droite D_o comprenant o est un sous-groupe de Π_o, +
   Etude du groupe ordonné D_o , + , $<$
   Somme de segments - Première idée de l'approximation d'une somme.

4. Première synthèse de la notion de groupe
   Mise en évidence de la notion de groupe à partir des exemples déjà rencontrés.
   Nouveaux exemples, notamment groupe cyclique.
   Calcul dans un groupe quelconque.
   Notation additive et notation multiplicative.
   Coefficients et exposants entiers rationnels.
   Equations dans un groupe.

5. Nombres réels
   Graduation de la droite - Axiome d'Archimède.
   Sous-graduations binaires ou décimales.
   Binaires et décimaux limités.
   Binaires et décimaux illimités.
   Axiome de continuité.
   Première apparition du concept de nombre réel.

6. Théorème de Thalès
   Théorème de Thalès sous sa forme générale.
   Rapport de vecteurs parallèles.

7. Homothéties

Images de parties du plan par une homothétie.
Rapport d'homothétie.
Les homothéties de rapport $\neq$ O conservent: la linéarité, l'incidence, le parallèlisme, le milieu, le rapport de vecteurs parallèles, l'ensemble des segments.
Composée d'homothéties de même centre.
Groupe commutatif des homothéties de même centre et de rapport $\neq$ O.
A titre facultatif: groupe des homothéties et translations ou groupe des dilatations.

8. Addition des réels.

Le groupe additif ordonné des réels.
Equations et inéquations - Calcul approché - Valeur absolue.

9. Multiplication des nombres réels.

Pour les homothéties de rapport entier rationnel et de même centre: le rapport de la composée de deux homothéties égale le produit des rapports.
Définition de la multiplication des nombres réels par généralisation de la propriété précédente.
Associativité et commutativité de la multiplication des réels.
Le groupe R_0, • des réels non nuls.
Equations dans R_0, •

10. Multiplication des vecteurs par un réel

Associativité mixte.
Double distributivité.
Combinaisons linéaires et projections.

11. Le champ réel ordonné R, +, • , $<$

Mise en évidence de la structure de champ ordonné.
Calcul dans ce champ.
Problèmes.

12. Fractions

Fractions à termes réels.
Règles et exercices de calcul de fractions.
Le champ des nombres rationnels.

13. Equations linéaires à une inconnue dans le champ des réels.

Equations à une inconnue - Problèmes.

14. Inéquations - Approximations - Premiers éléments d'un calcul d'erreurs

15. Le vectoriel du plan
Calcul vectoriel.
Equation vectorielle de la droite.
Bases et coordonnées.
Problèmes.

16. Symétries centrales
Images de parties du plan par une symétrie centrale.
Centre(s) de symétrie d'une partie du plan.
Composée de deux et de plusieurs symétries centrales.
Groupe des symétries centrales et des translations.

17. Symétries parallèles et symétries orthogonales.
Images de parties du plan et notamment de droites.
Propriétés conservées.
Axe(s) de symétrie d'une partie du plan.

CLASSE DE QUATRIEME
(14 à 15 ans)

A.

1. La relation "divise" dans Z et dans l'ensemble des entiers naturels.
Diviseurs premiers et primaires d'un nombre.
Parties stables et sous-groupes de Z, +
Tous les sous-groupes de Z, + sont cycliques.
P.G.C.D. et P.P.C.M. d'une partie de Z.
Relation de Bezout.

2. Equations de la droite
Equation vectorielle, équations paramétriques et équation cartésienne de la droite.

3. Fonctions de R dans R - Fonctions polynomes.
Exemples
Représention cartésienne.
Addition et multiplication de fonctions.
Anneau des applications de R dans R.

4. Algèbre des polynomes réels en une indéterminée

Algèbre des polynomes.
Division par (x-a) - Division avec reste.
Exercices de factorisation dans les cas simples.

5. Racine carrée d'un nombre réel positif

Racine carrée et ses approximations.

6. Systèmes d'équations linéaires à une, deux et trois inconnues

Résolution par la méthode de Gauss.
Problèmes.

7. Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues

Résolution de systèmes simples.
Problèmes. Interprétation géométrique.

B.

8. Groupe des déplacements et groupe des isométries du plan

Symétries orthogonales.
Translations, rotations et retournements, comme composées de symétries orthogonales.
Tout retournement comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie.
Groupe commutatif des rotations de centre donné.
Groupe des déplacements. Groupe des isométries.

9. Distance

Distance - cercles - disques ouverts et fermés.

10. Angles (orientés et non orientés)

Angle (orienté) d'une rotation.
Angle (orienté) d'un couple de demi-droites.
Groupe des angles (orientés).
Angle (non orienté) d'une paire de demi-droites.
Mesure des angles.

11. Cosinus et produit scalaire

Cosinus d'un angle.
Un angle non orienté est déterminé par son cosinus.
Produit scalaire et son invariance par les isométries.
Théorème de Pythagore.
Formules élémentaires de Trigonométrie.

12. Inégalité triangulaire
    Inégalité de Cauchy-Schwarz - Inégalité triangulaire.
    Convexité du disque.
    Intersection d'une droite et d'un disque ou d'un cercle.
    Calcul approché dans le plan.

13. Congruences et congruences directes
    Parites congruentes du plan.
    Parties directement congruentes du plan.
    Couples de points congruents.
    Triples de points congruents.

14. Groupe des similitures du plan et sous groupe des similitudes directes

15. Les aires et leur mesure
    Aires de parties élémentaires du plan.
    Calcul des aires en s'aidant du calcul vectoriel et de la trigonométrie.

Résumé of the article

GEOMETRY IN MODERN TEACHING OF MATHEMATICS

G. Papy

The author analyses the program of the Belgian experiment during the first five years of secondary teaching (from 12 to 17), a program established under his inspiration. In agreement with G. Choquet, he proves that the vector spaces, with scalar product, are the main way of modern teaching of geometry.

He studies the results of his experiment.

His conclusions are the following:

1. Traditional teaching before 15 conditions the pupils in an opposite direction to the spirit of modern mathematics.

2. The main notions concerning sets and relations are taught more easily at 12 than at 15.

3. Sets, relations and groups being taught since 12 or 13, it is possible to use these concepts for the direct construction of the mathematical edifice, and particularly of geometry. Mathematics thus appear in an unitary vision.

REPORT FROM THE NORDIC COMMITTEE FOR THE MODERNIZING OF SCHOOL MATHEMATICS. /1

Contents of the report

The Committee which is a common project for Denmark, Finland, Norway and Sweden has been working since 1960 and has published a series of experimental text-books in mathematics for different school stages in primary and secondary school. The text-books have been experimented with in schools in the four countries. In this report the text-books are described and the results from the experimental teaching summarized.

The Text-books

The Nordic Committee for the Modernizing of School Mathematics published in 1961-1964 the following experimental text-books in mathematics. The text-books have been written by teams of two to three persons from the Nordic countries. The pupils in Grade 1 are 7 years old and in Grade 12 in average 19 years old.

Mathematics for Grade 1 Part I (M 1 I)
" " " 1 " II (M 1 II)
" " " 2 " (M 2)

Algebra for Grades 7-9 Part I (A 7-9 I)
" " " " " II (A 7-9 II)
" " " " " III (A 7-9 III)
" " " " " IV, V (A 7-9 IV, V)

Geometry for Grades 7-9 Part I (G 7-9 I)
" " " " " I (GM 7-9 I)
" " " " " II (G 7-9 II)

Algebra for Grades 10-12 Part I (A 10-12 I)
" " " " " II (A 10-12 II)
" " " " " III (A 10-12 III)

Geometry for Grades 10-12 Part I (G 10-12 I)
" " " " " II (G 10-12 II)
" " " " " III (G 10-12 III)

1/ This is an intermediate report (1 February 1965) to be followed by a final one.

Calculus for Grades 11-12 Part I (F 11-12 I)
" " " - " II (F II- 12 II)

Differential Equations for Grades 11-12 (D 11-12)

Probability and statistics for Grades 10-12 (S 10-12)

For Grades 4-6 a series of text-books from a School Mathematics Study Group in the U.S.A. has been translated into one of the Nordic languages.

For each text-book is indicated the type of student for which it is intended, together with a short description of the contents.

Mathematics for Grade 1 Part I
(M1 I version 2S)

Type of students:

This text-book is intended to be the first book in mathematics which the students will meet. They are seven years old in Grade 1. It is intended for an unselected group of students.

Purpose

The purpose of this text-book is to give the students a clear idea of the concept of number and the first elements of addition of numbers. In order to do so most efficiently it introduces some concepts and symbols from elementary set theory.

Contents:

In the first page the concept of set is introduced and the bracket notation

Until the numerals are introduced pictures of things known to children are put within the brackets. The word "element" is used. The empty set and the symbol

$$\{ \quad \}$$

is introduced. The equality and non-equality sign between set notations is used. Sets are compared according to whether they have the

same number of elements or not, without introducing the numbers. Then the numerals for the numbers 1-5 are introduced. The symbols $<$, $>$, $=$, $\neq$ between numerals are used. In order to prepare for addition, union of sets and the symbol $\cup$ are introduced. At the end of the book the numerals 6-9 and the symbol + appear.

(M1 I version 3S)

Revision:

As a result of the experimental teaching revisions have been made. The equality sign between pictures of sets has been deleted and there is no mention of equality between sets.

Mathematics for Grade 1 Part II
(M1 II version 2)

Type of students:

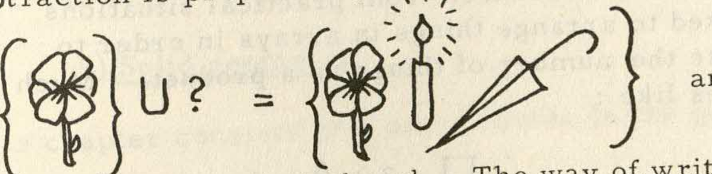
This text-book should be used after Part I in the first grade when the students are 7 years old.

Purpose:

Work with addition is continued and subtraction is introduced. The idea of the position system up to 100 is presented.

Contents:

Subtraction is prepared by using exercises like:



and 3 + ? = 5

The sign - is then introduced. The way of writing numerals for numbers from 10 to 100 using the decimal position system is treated in exercises of many different types. The simplest coins are presented.

Mathematics for Grade 2
(M 2 version 1S)

Type of students:

This text-book should be used after the two mentioned above in Grade 2

with students who are 8 years old in unselected classes.

Purpose :

To train the students in addition and subtraction with larger numbers, to introduce multiplication and division and to solve easy practical problems.

Contents :

The algorithms for addition and subtraction are treated. The associative property is used in carrying. Multiplication is defined from rectangular arrays.

```
. . . . .
. . . . .
. . . . .        4 . 5 = 5 . 4 = 20
. . . . .
```

Using this method the commutativity is evident from the beginning. Multiplication of larger numbers is derived from the distributive principle which is illustrated by pictures like :

```
. . . .  . . . . .
. . . .  . . . . .      3 . 9 = 3 . 4 + 3 . 5
. . . .  . . . . .
```

Brackets are used. Division is introduced from practical situations where the students are asked to arrange things in arrays in order to see if it is possible to write the number of things as a product. Much work is done with exercices like :

$\square \cdot 3 = 15 \qquad \square \cdot 3 + \triangle = 8$

before the division sign is introduced. In the book there is revision of the material taught earlier in the course.

Geometry for Grades 7-9 Part I
(G 7-9 I, version 3S)

Type of students:

This text-book is for use by students who are 13-14 years old. It is intended for approximately two-thirds of all the children in this age group. The students are presumed to have had hardly any geometry earlier.

Purpose :

To give the students an introduction to and motivation for the study of geometry. The purpose is to make the students acquainted with various geometrical ideas and their simple characteristics as well as to teach them how to use tools such as a ruler, a protractor and a pair of compasses.

Contents :

The chapters are :

1) What you can do with geometry.

A historical and practical background is given as motivation for future study.

2) The basic geometrical concepts

Correct definitions are given for e.g. rays, line segments, parallel lines and angles. The measurement of angles is discussed.

3) Polygons

Simple properties including the area of triangles and quadrilaterals are discussed.

4) Circles

Circles, arcs, tangents, circumference and area are treated.

5) Solid geometry

This chapter consists of a basic course in the geometry of space.

Geometry for Grades 7-9 Part II
(G 7-9 II version 1S)

Types of students ;

This text-book should be studied after the above-mentioned by students who are 15-16 years old. It is a little more difficult than the preceding

one.

Purpose :

A complete axiom system is presented and the idea of axiomatic treatment is explained. The development is based on mappings (congruence mappings such as translations, reflections and rotations but also similarity mappings). In this way the most important basic theorems are deducted.

Contents :

The chapters are :

6) Mappings. Symmetry

Without any real deductive reasoning the above-mentioned types of mapping are discussed.

7) Geometry and logic

The idea of axiomatic treatment is discussed using terms such as basic concepts, axioms, definitions, theorems and proof.

8) Basic concepts and axioms

A complete set of axioms (by G. Choquet) is given and discussed.

9) Congruence mappings

A more deductive treatment is given.

10) Theorems about triangles and quadrilaterals

11) Theorems about circles

12) Measurement of areas

13) Similarity mappings

14) Measurement of areas and volumes of some bodies

Geometry for Grades 7-9 Part I smaller version
(GM 7-9 I, version 1)

Types of students :

This text-book is intended for a broader range of students than the above-mentioned two books. The age of the students is 13-14.

Purpose :

To give an intuitive introduction to the study of geometry. To teach the students to handle ruler, protractor and compass. Simple theorems will be formulated and not proved but motivated from an empirical standpoint.

Contents :

The chapter headings are :

Points, lines and planes

Angles and measurement of angles

Some geometrical constructions

Measurement of distances

Symmetry

Polygons

Measurement of areas

Algebra for Grade 7-9 (Part I)
(A 7-9 I, version 2)

Type of students :

This text-book is for use by students who are 13-14 years old. It is intended for approximately two-thirds of all the children of this age group. The students are presumed not to have studied algebra before.

Purpose :

To enable the students to calculate with whole numbers and solve simple equations and inequalities. For this purpose the basic laws (commutative, associative and so on) are discussed as well as some easy logical

concepts such as equivalence, conjunction, disjunction, open statement and statement, together with some easy concepts from set theory.

Contents :

The chapter headings are :

1) About sets

The concepts of set, element of set, subset, the empty set, union and intersection are introduced together with the symbols $\{ \dots \}$, $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $\subset$, $\emptyset$, $\cup$ and $\cap$. The concept of variable is discussed. Venn diagrams are used. The logical concepts of statement, open statement and solution set are treated. Only the non-negative whole numbers are used.

2) Natural numbers

The number-line is used for instance in picturing the solution set to equations and inequalities. The set builder

$$\left\{ x \in N \;\middle|\; 3 > x \quad \text{or} \quad x > 7 \right\}$$

is introduced. The commutative, associative, distributive laws and the properties of neutral elements for addition and multiplication are treated. Subtraction and division are based on

$$3 + \square = 6 \qquad\qquad 3 \cdot \square = 6$$

respectively and it is discussed why division by zero is impossible. The students are trained in the reduction of simple expressions.

3) Equations and inequalities

Equations and inequalities within the set of natural numbers and zero are treated using the equivalence symbol

$$\Longleftrightarrow$$

Revision I : (A 7-9 I, version 3S)

The negative whole numbers are introduced in a new chapter after the second chapter. Some other minor changes suggested by the experimental teaching are included.

Revision II : (7-9, version 3D)

This is another more advanced revision from A 7-9 I, version 2 taking a different line. The first chapter about sets is enlarged. Inequalities and the set-builder are treated and the Venn diagrams are used more intensively, for example, to give a firmer foundation for logic. For instance "if and only if" is discussed. There is a new second chapter headed "Relations and Functions" dealing with ordered pairs, product set, solution set for an open statement in two variables, the relation and function as subsets of the product set, domain and range for relations and functions, one-to-one functions and function values. Figures like

are frequently used.

Algebra for Grade 7-9 Part II
(A 7-9 II, version 2S)

Type of students :

This text-book is for use in Grade 7 by students who are 13-14 years old. It should be studied immediately after Part I.

Purpose :

To strengthen the students' ability to handle factorisation of natural numbers, rational numbers, decimal numbers, approximate values and percentages.

Contents :

The chapter headings are :

4) Factors

Powers with natural numbers as exponents and factorisation of whole numbers are treated.

5) Rational numbers

The number-line and the four main operations on rational numbers are treated together with the solution of equations, inequalities and some practical examples.

6) Position systems

Starting with the position system and the system used by the Maya Indians, the decimal system and systems with other bases are discussed.

7) Decimal numbers

The four main operations on decimal numbers and the connection between the rational numbers and the decimal numbers are treated.

8) Approximate values

The chapter contains approximation for rational numbers and decimal numbers by decimal numbers, rounding decimals, the scientific notation for numbers, errors in approximate values and calculation with rational numbers.

9) Percentages

Different aspects of percent are taken up and applications are given including relative error.

Revision III : (A 7-9 II, version 3S)

Because of the introduction of negative numbers in Part I some revisions in Part II had to be made. The chapter on approximate values is shortened and the last parts of it are deleted and will be introduced later.

Algebra for Grades 7-9, Part III
(A 7-9 III, version 2S)

Type of students :

This text-book is for use in Grade 8 after Parts I and II. The students are I4-15 years old.

Purpose :

To introduce negative numbers and calculations with negative numbers, the coordinate system and manipulation with polynomials and other

rational expressions.

Contents :

The Chapter headings are :

IO) Negative numbers

The negative numbers are first denoted by $\bar{1}$, $\bar{3}$ . . . . The usual notation -1, -3 is introduced later in the chapter after the treatment of addition, substraction, multiplication and division. Some applications are given such as powers with negative exponents and the absolute value concept.

11) Sets of ordered pairs.

Starting from an intuitive example the product set is introduced first with finite sets as factors. Illustrations in the coordinate system are presented.

12) Rational expressions

Different types of manipulation with polynomials and rational expressions are treated such as addition, multiplication, squaring, factorisation and so on. Equations with denominators and equations of the second degree are solved.

13) The coordinate system

The concept is illustrated by many easy exercises such as to draw a picture of sets like

$$\{(x, y) \mid 2 < x < 3 \quad \text{or} \quad 3 < y < 4\}$$

$$\{(x, y \mid \quad |y| < 2 \quad \text{and} \quad |x| \geq 3\}$$

Mappings of simple figures are illustrated e.g. "Draw a picture of the image of the set (3,5), (2,4), (-1, -2), (0,0) under the mappings given by e.g. $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 2)$ or $(x, y) \rightarrow (-x, y + 2)$" and so on.

Algebra for Grades 7-9, Part IV

(A 7-9 IV, version 1S)

Type of students :

This text-book is for use in Grade 9 after Parts I-III. The students are 15-16 years old.

Purpose :

To make the slide rule an efficient tool, solve systems of linear equations and inequalities with illustrations in the coordinate system and give the students an introduction to elementary descriptive statistics.

Contents :

The chapter headings are :

14) The slide rule

The principles are illustrated by an intuitive discussion of powers with non-integral exponents. The students are trained in multiplication and division using the slide rule.

15) Linear inequalities and equations in two variables

The linear equation and inequality in two variables are illustrated in the coordinate system. Systems of equations are solved with practical applications and discussion of the cases without unique solutions. Polygon regions in the coordinate system are treated.

16) Descriptive statistics

In this chapter the following are treated : frequency tables, staple diagrams, histograms, other types of diagrams, the misuse of statistics, mean and median.

Algebra for Grades 7-9, Part V
(A 7-9 V, version 1S)

Type of students :

This text-book is for use in Grade 9 after Parts 1-IV. The students are 15-16 years old.

Purpose :

To discuss the concept of relation and function, real numbers and square roots.

Contents :

The chapter headings are :

17) Relations and functions

The concepts are defined as sets of pairs. Range and image are treated and applications given.

18) Real numbers

Real numbers and square roots are treated.

Geometry for Grades 10-12, Part I

Type of students :

This text-book is intended for the first class in the "gymnasium" where the students are 16-17 years old. The "gymnasium" is a theoretical school form leading to the university. In Finland, Norway and Sweden approximately 25% of all persons of this age are studying at the "gymnasium" and in Denmark somewhat less. The students have studied elementary deductive Euclidean geometry earlier.

Purpose :

To give an introduction to the study of geometry and trigonometry using vectors.

Contents

The chapter headings are :

1) Vectors

Starting with translation the vector concept is introduced and the basic laws for addition, subtraction and multiplication by scalar are given. The scalar product and representation in a general

parallel coordinate system are treated with different types of applications.

2) Parallel coordinate systems for points in the plane

The Presentation is based on vectors.

3) Trigonometry

Discussion of a general measure for angles. Definition of sine and cosine using the unit circle. Simple trigonometric formulae. Triangle solutions using the sine and cosine theorem .

Geometry for Grades 10-12, Part II
(G 10-12 II, version 2)

Type of students :

This text-book is for use in the gymnasium, after Part I, by students who are 17-18 years old.

Purpose :

To present the analytic geometry of the straight line using vectors.

Contents :

The chapter headings are :

4. 1 The straight line in the parallel coordinate system

4. 2 The straight line in the orthonormal coordinate system

4. 3 Examples of linear programming

Geometry for Grades 10-12, Part III
(G 10-12 III, version 1S)

Type of students :

This text-book is for use in the gymnasium, after Part II, by students who are 18-19 years old.

Purpose :

To give a short treatment of the conics, vectors in three dimensions and calculations of areas and volumes.

Contents :

The chapter headings are :

5) The circle

Equation for the circle.

6) Parabola, ellipse and hyperbola

The equations are derived from the directrise property.

7) Coordinate change

Rotation and translation.

8) The basic concepts of the geometry of space

In this chapter the theorems and definitions are presented intuitively without formal axioms and proofs.

9) Vectors in space

10) Orthonormal systems in space

11) Analytical treatment of line and plane

12) The sphere

These four chapters correspond to those of the plane.

13) Polyhedra

14) Cylinder and cone

Two short chapters.

15) Volumes and areas

The integration formulae for volumes are presented without complete proofs. Volumes and areas for the most important types of bodies are calculated.

Algebra for Grades 10-12, Part I
(A 10-12, version 2S)

Type of students :

This text-book is for use in the gymnasium by students who are 16-17 years old.

Purpose :

Using elementary concepts from set theory to give the background necessary for future handling of natural, whole and rational numbers, linear equations and inequalities and the function concept.

Contents :

The chapter headings are :

1) Elementary set theory

The chapter includes the concept of set, belonging subset, universe, complement, union and intersection together with the corresponding symbols.

2) The natural numbers

The basic rules (associative, commutative, . . .) for addition and multiplication, order, subtraction and division, powers, equations and inequalities and the position system are treated.

3) The whole number

The set of natural numbers is enlarged by the introduction of negative whole numbers. Absolute value is treated.

4) The rational numbers

A further enlargement of the rational numbers is discussed and calculations with fractions are revised.

5) Linear equations and inequalities

Statement, open statement and solution set are used to make clear the idea and solution of equations, inequalities and system of equations.

6) The concept of function

The general concept of function as a mapping from one set to another is treated with illustrations in the coordinate system.

Revision (A 10-12 I, version 3S)

As a result of comments in the reports from teachers using the text, changes have been made. The positive rational numbers are introduced before the negative whole numbers, more simple excercises and a section on proportionality have been added.

Algebra for Grades 10-12, Part II
(A 10-12 II, version 2S)

Type of students :

This text-book should be used after Part I in the gymnasium by students who are 16-17 years old.

Purpose :

To teach the students to handle polynomials and rational expressions, sequences and finite sums and approximate values. The properties of the real numbers are discussed, square roots, the exponential and logarithm function and the slide rule are treated.

Contents :

The chapter headings are :

7) Polynomials and rational functions

The factor theorem and handling of the functions are treated.

8) Sequences and finite sums

A short presentation of arithmetic and geometric progression and summation problems are given. The binomial theorem and the idea

of proof by introduction are discussed.

9) Approximate values

Error, relative error, calculations with approximate values and linear interpolation are treated. Sequences of approximate values are discussed as an introduction to real numbers.

10) The real numbers

Naturally no complete theory is given for real numbers but the question is discussed. Square roots and roots of higher order are treated briefly. Polynomial equations are solved. The existence of the exponential function is postulated and the logarithm function taken as the inverse to the exponential function. The principle of numerical calculations with logarithms is given. The slide rule is explained.

Algebra for Grade 10-12, Part III
(A 10-12 III, version 1S)

Type of students :

This text-book should be used after Parts I-II in the mathematics stream in the gymnasium in the last year when the students are 18-19.

Purpose :

To give an introduction to complex numbers.

Contents :

The basic laws for complex numbers are given and calculations are practised. Geometric representation, the solution of quadratic equations, definition and simple properties of e^{z} are treated.

Calculus for Grades 11-12, Part I
(F 11-12 I, version 2S)

Type of students :

This text-book should be used in Grade 11 in the mathematics stream in the gymnasium. Students are 17-18 years old.

Purpose :

To give the necessary background concerning functions, limits, continuity and differentiation in order to study calculus.

Contents :

The chapter headings are :

1) Introduction

Background concepts such as set concepts, intervals, neighbourhoods and bounds.

2) Functions

The function concept as a mapping from a set to another, domain, range, monotony and trigonometric formulae are concepts treated in this chapter.

3) Limits

The concept of neighbourhood is used in giving correct definitions of the limit concept. Different types of limits are treated.

4) Continuous functions

After a definition of continuity, theorems concerning continuous functions are proved together with the continuity of trigonometric and rational functions. Compound functions are also taken up.

5) Derivatives

The derivative is defined and rules of differentiation given. The differentiability for rational and trigonometric functions and theorems about the relation between derivative, monotony and maxima and minima are proved. Applications are given.

Calculus for Grade 12 Part II
(F 11-12 II, versions 2S)

Type of students :

This text-book should be studied after Part I in the twelfth grade in the mathematics stream in the gymnasium, when the students are 18-19 years old.

Purpose :

To treat the exponential and logarithm functions and integral together with a variety of application of calculus.

Contents :

The chapter headings are :

6) Higher derivatives

Among applications are convexity.

7) Sequences and series

Questions on convergence are concentrated on the geometric series.

8) Integrals

Starting with practical examples such as calculation of area and work the integral is defined by using sets of integrals of piece-wise constant functions. Primitive functions and their relation to integrals are treated together with applications.

9) Natural logarithms

A stringent definition using integrals is given.

10) Inverse function

Existence, continuity and differentiability are discussed. Implicit differentiation is treated.

11) Exponential functions.

The existence and properties are derived taking the exponential function as the inverse of the logarithm function. The power function and other applications are treated.

12) Methods of integration

This short chapter contains partial integration, integration by substitution, integration of rational functions and generalized integrals.

13) Vectors functions

Definition, continuity and the differentiability of vector functions are treated together with applications from physics and curve tracing.

14) Polynomial approximations

The chapter ends with Maclaurin's formula.

Differential equations for Grade 11-12
(D11-12, version 5S)

Type of students :

This text-book is for use in the mathematics stream in the gymnasium when the students are 18-19 years old.

Purpose :

To give an introduction to linear ordinary differential equations at an elementary level.

Contents :

The chapter headings are :

1) Introduction

The idea of a differential equation is discussed.

2) The linear equation of first order

Proofs of existence and uniqueness are given.

3) The linear homogeneous equation of the second order with constant coefficients

4) Examples of solutions of non-inhomogeneous equations

Revision (D 11-12, version 6S)

Only smaller changes are made involving the moving of sections from one chapter to another.

Probability and Statistics
(S 10-12, version 2)

Type of students :

This text-book is for use in the gymnasium, where the students are 16-19 years old.

Purpose :

To teach the students elements of descriptive statistics and give an introduction to probability in finite and continuous spaces and give insight into statistical inference.

Contents :

The chapter headings are :

1) Introduction to the concept of probability

The chapter contains the classical concept of probability with simple examples. Its limitations are shown by discussing relative frequencies.

2) Probabilities in finite sample spaces

The idea of a mathematical model is discussed. Sample space, outcome, event, elementary probabilities, union events, intersection events, independent events, frequency function, random variables, mean, variance and the binomial distribution are treated.

3) Probabilities in general sample spaces

The problems with an axiom system are discussed. For continuous random variables frequency function, mean and variance are treated. The students are taught to handle the normal distribution.

4) Descriptive statistics

Graphical illustrations and calculations of mean, median and variance are treated with many practical examples.

5) Statistical inference

It is at this stage not possible to give more than an introductory course

with glimpses of problems which are met in this field. The testing of hypotheses, estimation and instances of confidence interval are treated.

Appendices

In five appendices sets, combinatorics and the summation symbol are treated.

Revision (S 10-12, version 3S)

Because of experiences reported by teachers the text-book was revised. The fourth chapter was put first and shortened to some extent. In the other chapters minor changes were made, among other things, in order for the students in lines with less time allotted to mathematics to omit some starred section and still get a clear picture. The chapter about statistical inference was made easier.

The reports from the experimental teaching

Every teacher who uses the experimental text-books is asked to submit a report to the Committee about his experiences. Last year a paper was distributed to the teachers with specific questions for them to answer. The teachers are generally very positive. It should be remembered that the teachers have entered the task voluntarily. The answers to a question whether the experimental teaching should continue are almost a hundred per cent positive. Hardly anybody reports the students to be less interested in this type of text-book than in the ordinary ones. As a matter of fact more than half of the teachers say that the students are more or much more interested.

In general the experimental text-books contain more material for the students to read than ordinary text-books. The reason for this is an attempt to teach the students to study mathematics by themselves. Most teachers have reported however, that many students have had difficulties in reading the text. Whether this is a result of unaccustomedness and will be improved later on, it is not possible to tell, as the experiment has been in progress for only a short time.

Many teachers have had difficulties in managing the text-books in the time allocated. If a teacher has used the same text-book for more than one year he has been more successful the second year when he knows what to emphasize and what to leave out. The lessons have been less devoted to doing exercises more devoted to discussions than earlier.

Some teachers fear that this will result in the students not being so skilled in the manipulation of numerical and algebraic expressions but no evidence in that direction has been found. There is a tendency to complain about a lack of exercises.

In one question the teachers are asked to classify the text-book as very successful, successful, acceptable, not very acceptable, bad. The Swedish teachers in the year 1963-64 made for instance the following classification (all texts):

very successful	23
successful	163
acceptable	116
not very acceptable	11
bad	1

The difference between the various text-books is very small. The amount of work for the students is found to be approximately the same as under usual conditions.

The teachers were also asked whether they thought that courses for the teachers using the text-books were necessary. About 50% were of that opinion.

The following is a summary of the comments given for the different text-books.

Mathematics for Grade 1 (M 1)

All teachers were positive and found the stress on the number concept valuable. The introduction of the symbols for less than and greater than and of the set symbols has been successful. Some teachers were doubtful about the usefulness of introducing set symbols. They were many complaints about there being too few exercises, especially for the gifted children.

Mathematics for Grade 4 (M 4)
(translation from School Mathematics Study Group)

Among positive experiences is the better survey the students get, the discussions which have arisen, the treatment of different number systems and the concepts from set theory.

Among negative experiences are linguistic difficulties. The wording was on the whole much too difficult for the ordinary student. The teachers also reported considerable difficulties in handling the text-book in the right way. They felt very unfamiliar with the text-book and it was hard for them to select vital sections and treat them more carefully and omit other sections. This also caused difficulties in finding ways to differentiate the teaching.

Algebra for Grades 7-9 (A 7-9)

The introduction of set concepts and symbols has turned out well. The students have found this part of the text-book very interesting and easy. The teachers thought themselves that the concepts were difficult but the teaching has proved the opposite.

In Finland the tradition is to treat negative numbers early. When the text-book did not do so it raised strong criticism.

In Sweden all the teachers complained to some extent about the text-book being very difficult for the students to read because there was too much text and the wording was too difficult for children of this age group. These difficulties together with the fact that some parts of the exercises were not arranged in the best way made a few teachers very disappointed with the text-book. There are many others however, who in spite of these difficulties have succeeded in teaching the students the valuable mathematics presented in the book. These teachers say that they can hardly think of returning to an ordinary text-book. Parts which require more exercises include the reduction of expressions, which is also a difficulty in ordinary teaching. The chapter about approximate values has been reported to be difficult. To summarize the reaction from the Swedish teachers it can be said that they have appreciated the way of introducing material in the text-book but have found the style of presentation less suitable for Swedish conditions.

In Denmark the new Danish version (A 7-9 I, version 3D) has been experimented with on a larger scale to the great satisfaction of all participants. They have found it very valuable to treat concepts like variable, statement, open statement, inequality, Venn diagrams, relation and function in such a complete way.

Geometry for Grades 7-9 (G 7-9)

The first part consisting of exercises in drawings and measurements has been found very easy and very acceptable. It has been difficult for the

students to extract the vital facts because there are no theorems formulated in this part. Especially in Finland there was some dissatisfaction on this matter. Some teachers do not like the definition of angles, which makes it impossible to treat angles exceeding 180° Much of the material has been found so easy that it can be moved down to lower grades.

The second part has been reported more difficult especially the chapter about axioms. The presentation of symmetries, solutions and translation was accepted very well but many students found the proofs difficult to read and understand. The teachers, however, are in general enthusiastic and say that the students show greater interest.

Geometry for Grades 10-12 (G 10-12)

There has been complete agreement that vectors should be treated in the gymnasium. The teachers have reported many advantages such as better coordination with physics and an excellent way to integrate synthetic and analytic geometry.

The reduction in the treatment of conics and the introduction of a coordinate system in space has been well received. To give the general definition of the trigonometric functions using the unit circle instead of first taking them as ratios in the triangle with a right angle is considered to be an advantage by almost all teachers.

The text-book had a good deal of text for the students to read. Almost all teachers have liked this. Of those few teachers who say it is too difficult for the students, some have changed their opinion after using the text-book for a second year. The definition of scalar product using projection and not introducing trigonometry until later has been disliked by a large number of teachers. It seems preferable to start with trigonometry. The number of exercises is considered too few. Vector product is asked for by some teachers. The second part dealing with the equation for the straight line is said to be too voluminous.

Algebra for Grades 10-12 (A 10-12)

The use of set concept has been found very valuable. It has, however, been considered rather late to introduce set concepts in the gymnasium and it would have been better to do so earlier. The same has been said about the following three chapters dealing with the different number sets. Difficulty has been reported in maintaining interest among the students in Chapter 4. After the revision of the text the situation has improved. The introduction of the general function concept in Chapter 6 has been

accepted well. The chapters in Part II about polynomials and the solution of equations of higher degree and approximate values are reported to be as difficult as it now is with the ordinary teaching.

The teachers say that it has been difficult to manage the text-books in the allotted time. This situation will improve when part of the material is treated earlier in school. The students have generally been as much or more interested than is usual with ordinary text-books. There is a tendency for the text-book to be more suitable for the more able students. Many students have had difficulties in reading the text-books themselves. Two-thirds of the teachers believe the skill in computation to be worse than with the usual text-books.

Calculus for Grades 11-12 (F 11-12)

This text-book does not imply a great change compared with the usual text-books. The greater stress on limits and continuity has been found valuable by most teachers. Some consider it to be the maximum that the students can assimilate at this stage. The time taken to reach the first chapter which is necessary for application - that is Chapter 5 about derivatives - is too long and this makes it difficult to hold the full attention of all the students in teaching the more abstract chapters preceding it. The stress on what is a derivative and an integral has been reported good. It has been difficult for many students to read the text-book by themselves without prior preparation.

Differential equations (D 11-12)

The reports say it has been excellent to have an opportunity to teach differential equations in the gymnasium both because of the opportunities to apply the differential and integral calculus that the students know and because of the applications in physics. It has been found easy to teach the students to solve the equations. To do so with the proofs has been more difficult. The rigor has been well accepted and the text-book has been considered very clear. The first chapter is said to be too abstract and does not give opportunities for practising calculations. Some teachers have missed exercises in which the students are asked to set up equations from practical situations and then solve the equations. The students have reacted positively to the text-book.

Statistics and probability (S 10-12)

This is one of the experimental texts in which the students have been most interested. Among the reasons is the close connection with pro-

blems occurring in real life and other school subjects and the possibility of applying much of the mathematics the students already know. They have been more interested in the probability part. The descriptive statistics could in many teachers' opinions be studied earlier in school. The use of set concepts and symbols has been successful.

There is a tendency for hesitation among the teachers to start using this text because of insufficient background. Almost all teachers say that special courses for the teachers are necessary.

The text has also been used with success in streams that do not specialize in mathematics. For this type of student statistics and probability are found to be most valuable.

The revision of the text-book has made it easier to teach from. The concept of random variable has not been difficult for the students.

Resumé de l'article

RAPPORT DU COMITE NORDIQUE POUR LA MODERNISATION DES MATHEMATIQUE SCOLAIRES/[1]

Le rapport traite de l'organisation et des résultats de l'expérience faite au cours des années 1961-1964 dans plusieurs écoles du Danemark, de Finlande, Norvège et Suède. L'expérience a été basée sur les séries de manuels réalisant le programme modernisé de mathématiques dans différentes versions et concernant l'enseignement de la première à la douzième année (élèves de 7 à 19 ans). Les textes destinés à la quatrième, à la cinquième et à la sixième année sont traduits de manuels adéquats préparés par le School Mathematic Study Group aux Etats-Unis; les autres classes expérimentales ont employé des textes élaborés par le Comité Nordique lui-même.

Le rapport présente en détail:

a) le type du groupe d'élèves à qui on a adressé le texte donné (âge, genre et niveau de la préparation antérieure, le caractère du groupe : sélectionné ou non sélectionné);

b) le contenu mathématique du manuel, ainsi que les corrections introduites, qui se sont révélées nécessaires à la lumière de l'expérience achevée;

c) les remarques et les opinions des enseignants utilisant les textes quant à leur valeur pédagogique;

d) les remarques concernant l'attitude des enseignants vis-à-vis des propositions présentées dans les manuels.

Selon le rapport, l'expérience a prouvé qu'en majorité les textes ont été bien adaptés à leur réalisation scolaire.

1/ Rapport provisoire qui sera remplacé par le rapport final.

Sur l'Enseignement de la théorie élémentaire des Groupes
Les Groupes et leurs applications en "Quarta" et "Untertertia"
par Hans-Georg STEINER

Dans cet article je me propose de rendre compte d'expériences pédagogiques relatives à l'emploi des groupes et à leur théorie élémentaire. Cet enseignement fut donné dans le cycle "Quarta-Untertertia". Je me propose d'indiquer la matière traitée sous la forme élaborée au cours de l'enseignement et d'indiquer la méthode pédagogique correspondante. Une série de devoirs et d'exercices sur ce sujet paraîtra ultérieurement dans un fascicule consacré à la théorie des groupes ; la paraîtra aussi la seconde partie de cet article concernant les classes terminales.

1) Travaux préliminaires.

J'ai suivi la classe qui a reçu cet enseignement du milieu de la "Quinta" (11 à 12 ans) jusqu'à la fin de la "Untertertia" (13 à 14 ans). Parlons tout d'abord de quelques particularités de l'enseignement jusqu'à la seconde moitié de la "Quarta", juste avant de commencer l'étude des groupes. C'est peut-être grâce à ces particularités que le niveau obtenu dans l'étude des groupes fut atteint avec une relative facilité. Donnons quelques indications sommaires sur ces points particuliers, différant par le choix et par l'esprit du programme habituel :

1) <u>Relation d'ordre dans un ensemble de nombres</u> : Ordre des entiers naturels (comparaison, représentation décimale, nombres intermédiaires et leur décompte, nombres consécutifs, existence d'un plus petit entier naturel mais non d'un plus grand, tout ensemble d'entiers naturels possède un plus petit élément, changement d'ordre : par exemple ensemble d'élèves d'après la taille, l'âge, le nombre de cheveux etc., ordre alphabétique et ordre lexicographique induit sur les mots etc.), nombre de permutations d'un ensemble de n éléments (n!), (questions combinatoires à l'aide de diagrammes arborescents). Ensemble ordonné des fractions (comparaison par différentes méthodes, ordre sans trou, ensemble des nombres rationnels sans plus petit ou plus grand élément, intervalles, dénombrabilité des nombres rationnels, ordre de Cantor d'après le procédé des diagonales, exercices sur l'ordre de Cantor).

2) Représentation des entiers naturels dans un système p-adique avec $p \neq 10$. Opérations dans ces systèmes.

3) Nombres rationnels négatifs, addition, loi de monotonie de l'addition valeur absolue.

4) Notions de base en logique : Propositions, formes diverses, relations logiques (en liaison avec des égalités et des inégalités simples). Termes, identification de termes, termes et fonctions, négation, conjonction, disjonction, quantificateurs "pour tout" et "il existe" et leur négation.

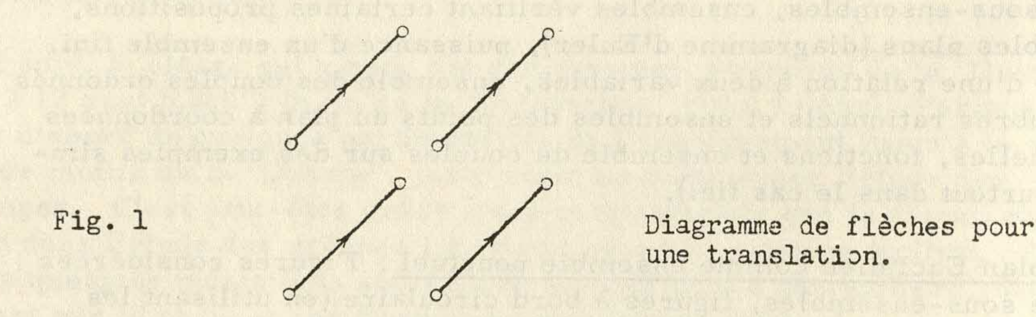
5) Notion d'ensemble et Notations ensemblistes : ensembles et éléments $\in, \cap, \cup, -, ^{-}, \subset, \subseteq$, ensemble de base, ensemble vide, propriétés et sous-ensembles, ensembles vérifiant certaines propositions, ensembles plans (diagramme d'Euler), puissance d'un ensemble fini, graphe d'une relation à deux variables, ensemble des couples ordonnés de nombres rationnels et ensembles des points du plan à coordonnées rationnelles, fonctions et ensemble de couples sur des exemples simples (surtout dans le cas fini).

6) Le plan Euclidien comme ensemble ponctuel : Figures considérées comme sous-ensembles, figures à bord circulaire (en utilisant les propriétés de l'ordre des nombres rationnels) : disque ouvert, disque fermé, circonférence, lunules etc., ensembles ouverts, ensembles connexes, domaines, ensembles convexes, questions simples de topologie.

7) Enseignement préparatoire de la Géométrie en utilisant le double décimètre et le rapporteur de 360° .
Point et droite (comme ensemble de points), incidence, utilisation de la règle, distance comme fonction, à valeurs rationnelles, sur l'ensemble des couples de points, orientation des droites, rayons, segments, milieu, angles (orientés ou non), usage du rapporteur, mesure des angles comme fonction sur l'ensemble des angles (orientés év. non orientés) à valeurs rationnelles dans l'intervalle $[0, 360°[$ év. $[0, 180°[$, orientation ponctuelle du plan, orientation globale du plan, bissectrice, perpendiculaires.

8) Applications du plan dans ou sur lui-même. Je vais être un peu plus

précis à ce sujet. Les transformations géométriques se présentèrent à propos de la possibilité de comparer des figures par "superposition" (dans un sens intuitif à préciser) et de la comparaison en différents points de l'orientation locale définie par le rapporteur de 360 degrés (un tel rapporteur a deux faces ayant des orientations différentes). Les élèves découvrirent d'eux mêmes que cette comparaison pouvait se faire à l'aide de translations, rotations ou symétries. L'étude expérimentale qui suivit avait pour but essentiel de préciser la notion mathématique d'application. Le papier calque est particulièrement approprié à cette étude et permet de voir que les applications à étudier peuvent être étendues à des points quelconques du plan. L'utilisation de diagrammes de flèches (fig. 1 et plus tard 2, 3, 4) facilite l'élaboration des notions de base.


Fig. 1 Diagramme de flèches pour une translation.

Une première définition fut indiquée : <u>Une application du plan dans lui même est une loi qui à chaque point fait correspondre un point et un seul.</u>

Cette notion est sans doute très générale, mais n'est nullement trop difficile pour les élèves. Elle fournit un vaste champ, d'études utiles pour la suite, que les élèves peuvent explorer librement. La question : trouver des transformations planes autres que les trois types de transformations envisagées initialement a énormément stimulé l'imagination des élèves de la "Quarta". Ainsi ont-ils découvert d'eux-mêmes par exemple, les homothéties et les projections sur une droite, parallèlement à une droite donnée, dont le rôle n'est essentiel qu'ultérieurement mais qui pour maintes considérations sont importantes dès le début (à titre de contre-exemples, ...). Les diagrammes de flèches ouvrirent la voie à des transformations moins "naturelles".

D'un tel diagramme on exigeait jusqu'à présent que tout point du plan soit l'origine d'une flèche et d'une seule. Il est ainsi permis par exemple que tout le plan soit transformé en un seul point (fig. 3). Cela permit d'éclaircir certaines notions et exercices : point fixe, ensemble des points fixes, application constante, et pour les figures : Original et image, retournement, composition des applications etc. Parallèlement à ces exercices on put donner les premières notions sur la théorie des fonctions.

Les translations, rotations, symétries sont des applications du plan sur lui-même, c'est-à-dire que chaque point intervient aussi comme point image. De plus, ces applications sont inversibles c'est-à-dire qu'en renversant le sens de toutes les flèches on obtient une nouvelle correspondance univoque.
A cette caractérisation fut liée l'étude des symétries axiales qui aboutit à des théorèmes sur les symétries auxquels furent rattachées plus tard les propriétés, des deux autres types de transformations, découverts d'abord empiriquement. Je n'insiste pas sur la construction de la géométrie des transformations. Elle se fit essentiellement suivant la voie tracée dans les excellents ouvrages de K. FABER et H. NICKELSEN. On y trouvera aussi des contributions variées à l'étude des groupes dans le cadre des groupes de transformation à l'usage des classes moyennes et supérieures. Je peux donc renoncer à insister sur les détails qui s'y trouvent.

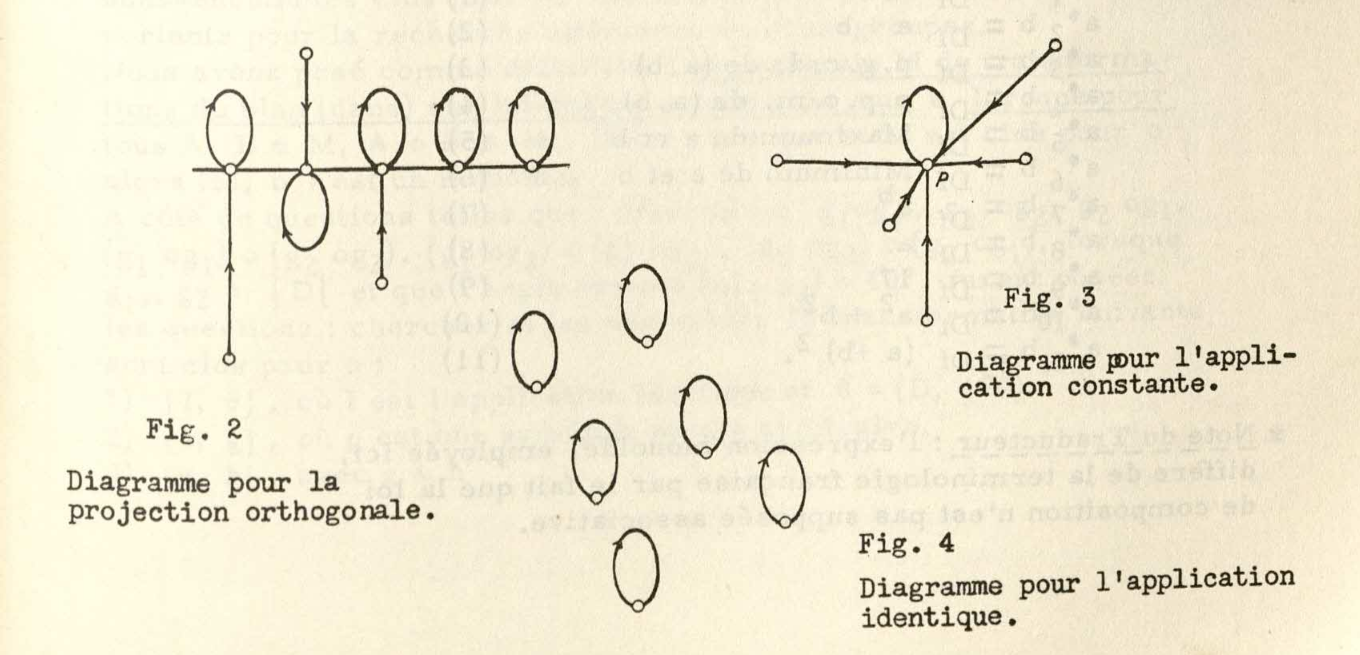


Fig. 2

Diagramme pour la projection orthogonale.

Fig. 3

Diagramme pour l'application constante.

Fig. 4

Diagramme pour l'application identique.

2) Initiation inductive à la notion de Groupe.

a) Une notion particulièrement adaptée à l'introduction de la notion de groupe par voie inductive est celle de monoïde ("Verknüpfungsgebilde") ; on entend par là un ensemble muni d'une loi de composition interne. Un vaste champ de recherches fut ainsi exploré à la fois au Cours de Géométrie et au Cours d'Algèbre : la somme, le produit, le p.g.c.d. ou le p.p.c.m. d'entiers naturels a et b est de nouveau un entier naturel. De même la composition d'application A, B du plan dans (sur) lui-même est aussi une application du plan dans (sur) lui-même. Dans chaque cas existe un ensemble M de base. A chaque couple ordonné (x, y) d'éléments de M est associé par la loi de composition éventuelle un élément déterminé z de l'ensemble. Si on prend comme symbole de la loi "•" on écrit $z = w \bullet y$. On arriva ainsi aux définitions suivantes :

1) Une loi de composition interne sur M est une loi, qui à tout couple ordonné (x, y) d'éléments de M, fait correspondre un élément $z = x \bullet y$ de M. ($x \bullet y$ se lit : x composé avec y ou plus rapidement, x avec y).

2) Un couple ordonné (M, •) comprenant un ensemble M et une loi de composition interne • sur M est appelée monoïde (simple) ★

De nombreux exemples furent rassemblés d'abord pour l'ensemble des nombres naturels N :

$$a \bullet_1 b =_{Df} a.b \quad (1)$$
$$a \bullet_2 b =_{Df} a + b \quad (2)$$
$$a \bullet_3 b =_{Df} \text{p.g.c.d. de } (a,b) \quad (3)$$
$$a \bullet_4 b =_{Df} \text{p.p.c.m. de } (a,b) \quad (4)$$
$$a \bullet_5 b =_{Df} \text{Maximum de a et b} \quad (5)$$
$$a \bullet_6 b =_{Df} \text{Minimum de a et b} \quad (6)$$
$$a \bullet_7 b =_{Df} a^b \quad (7)$$
$$a \bullet_8 b =_{Df} a \quad (8)$$
$$a \bullet_9 b =_{Df} 17 \quad (9)$$
$$a \bullet_{10} b =_{Df} a^2 + b^2 \quad (10)$$
$$a \bullet_{11} b =_{Df} (a+b)^2. \quad (11)$$

★ Note du Traducteur : l'expression "monoïde", employée ici, diffère de la terminologie française par le fait que la loi de composition n'est pas supposée associative.

Des exemples correspondants furent indiqués pour l'ensemble Z de tous les entiers et l'ensemble R de tous les rationnels. Ensuite pour l'ensemble E des points du plan on considéra les lois :

$P \bullet_{12} Q$ = Df	Symétrique de P par rapport à Q	(12)
$P \bullet_{13} Q$ = Df	Milieu du segment PQ	(13)
$P \bullet_{14} Q$ = Df	Quatrième sommet du parallélogramme construit sur OP, OQ, O étant un point fixe.	(14)

De nombreux calculs concrets furent naturellement faits à propos de ces exercices ainsi par exemple :

$2 \bullet_5 3 = 3 \bullet_5 2 = 3$, $2 \bullet_6 2 = 2$, $2 \bullet_7 3 = 8$, $3 \bullet_7 2 = 9$, $2 \bullet_{10} 3 = 13$, $2 \bullet_{11} 3 = 25$, $(2 \bullet_5 3) \bullet_5 1 = 2 \bullet_5 (3 \bullet_5 1) = 3$, $(2 \bullet_7 3) \bullet_7 2 = 64$, $2 \bullet_7 (3 \bullet_7 2) = 512$.

etc. On peut évidemment combiner plusieurs lois de composition. De même pour (12) et (14) furent posés des problèmes de construction.

b) La composition des applications appartient essentiellement à la Géométrie des transformations ponctuelles dans laquelle la notion de groupe joue un rôle considérable. Avant de montrer que toute isométrie se décompose en un produit de symétries, faisant ainsi jouer un rôle central aux symétries, il importe de développer la notion de groupe. Il est donc utile dès le stade préaxiomatique de trouver, dans l'ensemble des symétries, rotations et translations, des sous-ensembles clos pour o. De tels exercices sont d'ailleurs importants pour la recherche ultérieure de sous-groupes.
Nous avons posé comme définition : un ensemble M de transformations du plan (dans) sur lui-même est dit clos pour o lorsque pour tous A, B $\in$ M, A o B $\in$ M. Il est clair que si M est clos pour o alors (M, o) est un monoïde.
A côté de questions telles que : déterminer $g_1 o g_2$, $g_2 o g_2$, $g_2 o g_1$, $(g_1 o g_1) o (g_2 o g_2)$, $(g_1 o g_2) o (g_1 o g_2)$, $(g_1 o g_2) o (g_2 o g_1)$, lorsque $g_1 \cap g_2 = \{D\}$ et que l'angle orienté $(g_1, g_2) = 40°$, furent posées les questions : chercher si les ensembles de transformation suivants sont clos pour o :

1) $\{I, \theta\}$, où I est l'application identique et $\theta = (D, 180)$
2) $\{I, g\}$, où g est une symétrie axiale arbitraire.
3) $\{g, h\}$, avec $g \perp h$

4) $\{I, g, h\}$ avec $g \perp h$, Int $(g, h) = \{D\}$
5) $\{I, \theta_1, \theta_2\}$ avec $\theta_1 = (D, 120°)$, $\theta_2 = (D, 240°)$ etc.
A cet effet il est utile de se servir de tableaux comme le suivant, relatif à l'exercice 4. :

A	B	A o B
I	I	I
g	g	I
h	h	I
I	g	g
g	I	g
I	h	h
h	I	h
g	h	(D, 180°)
h	g	(D, 180°)

ou

•	I	g	h
I	I	g	h
g	g	I	(D, 180°)
h	h	(D, 180°)	I

On remarque que M n'est pas clos dans ce cas.

c) Des questions analogues se posèrent au Cours d'Algèbre à propos de nouvelles et importantes lois de composition sur l'ensemble des entiers naturels : l'addition et la multiplication des classes résiduelles modulo un entier donné n. On y fut amené par la recherche des sous-ensembles de N clos pour +. De tels ensembles existent ; ce sont par exemple : l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des multiples de 3 ou de 4 etc.. Soit N' l'ensemble ayant pour éléments les entiers naturels ainsi que O. Le seul ensemble fini clos est $\{0\}$; il en est de même pour l'ensemble de tous les entiers ou de tous les rationnels, car l'addition répétée, d'un nombre différent de zéro, donne toujours de nouveaux nombres. Pour la multiplication les seuls ensembles clos de N' sont $\{0\}$, $\{1\}$, et $\{0,1\}$ pour Z on trouve en plus $\{-1, 1\}$ et $\{-1, 0, 1\}$.
Des exemples intéressants furent fournis par les autres lois de composition sur N indiquées plus haut : chercher si l'ensemble des diviseurs d'un nombre est clos pour (3) et (4) ou si tout sous-ensemble de N est clos pour (5), (6) et (8) etc.
L'addition des classes résiduelles fut introduite par la détermination de l'angle de la rotation produit de deux rotations de même centre, ainsi que par des calculs sur les heures et les jours de la semaine : pour les angles on considère les restes modulo 360°, pour les heures les restes modulo 24 ou 12, pour les jours de la semaine : les restes modulo 7 ; par exemple 240° + 250° = 130°, 16 + 10 = 2 ou

4 + 10 = 2 , 4 (jeudi) + 3 = 0 (dimanche) etc. De tels calculs furent aisément compris par les élèves : on conduit les calculs comme d'habitude et on remplace ensuite le résultat obtenu par le plus petit reste de la division (par 24 par exemple pour les heures); pour tout entier naturel n on a ainsi défini une addition des classes modulo n, $\oplus_n$ et ($\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $\oplus_n$) est un monoïde. Il a suffit d'une indication pour que les élèves, dans des devoirs faits à la maison, trouvent de nombreuses lois analogues ; c'est ainsi qu'ils ont découvert la multiplication des classes et les monoïdes correspondants ($\{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\odot_n$) ; de nombreux exercices furent rattachés à cette étude.

d) Les exercices et les tables de lois de composition (ensembles finis) amenèrent aux premières conclusions sur <u>les propriétés des monoïdes</u>. De telles propriétés furent déjà formulées à propos des règles du calcul ordinaire. Elles formèrent là, entre autres, les bases de certains procédés de calcul ; par exemple :

Pour tous $\underline{a}, \underline{b}$ M
$\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$ <u>(commutativité)</u> (15)
Pour tous $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ M
$(\underline{a} \bullet \underline{b}) \bullet \underline{c} = \underline{a} \bullet (\underline{b} \bullet \underline{c})$ <u>(associativité)</u> (16)

La propriété de commutativité est vérifiée par les monoïdes $(N, \bullet_i)$ avec i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 ainsi que par $(E, \bullet_i)$ avec i = 13, 14. Par contre, les autres monoïdes, de notre collection d'exemples, n'ont pas cette propriété. De même les monoïdes :

$$A_n = (\{0, 1, \ldots, n-1\} , \oplus_n) \quad (17)$$
$$(\{0, 1, \ldots, n-1\} , \odot_n) \quad (18)$$

sont commutatifs, comme on le reconnaît de suite. Parmi les ensembles d'application, clos pour la loi de composition, certains sont commutatifs, d'autres non commutatifs. Ainsi on a $\underline{g} \circ \underline{h} \neq \underline{h} \circ \underline{g}$ sauf si $\underline{g} = \underline{h}$ ou $\underline{g} \perp \underline{h}$.
A vrai dire, seul la connaissance de contre-exemples donne à la formulation explicite d'une propriété son plein sens. Ainsi l'associativité (16) a lieu pour i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 14 mais non dans les autres cas ; elle est vraie aussi pour A_n et 18.

Insistons particulièrement sur l'associativité de o . Celle-ci donne souvent lieu, dans la littérature, à de longs calculs : pour les applications linéaires par exemple on vérifie l'associativité de la multiplication des matrices. Mais celle-ci se déduit presque immédiate-

ment de l'associativité de la composition des applications d'un ensemble dans lui-même, qui elle, est presque triviale : En effet, pour les applications de E dans lui-même (16) exprime que pour tout point P de E :

$$P^{A \circ (B \circ C)} = P^{(A \circ B) \circ C}$$

Un diagramme de flèche (fig. 5) montre la trivialité de la démonstration ; mais c'est là justement que les élèves éprouvent certaines difficultés.

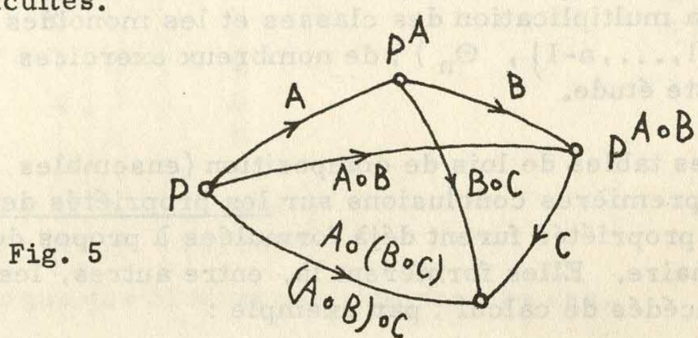


Fig. 5

C'est pour cette raison que je parle souvent d'associativité à propos de questions de la vie courante : ainsi si je vais de la salle de classe à la salle de physique en passant devant la loge du concierge puis en descendant l'escalier, il importe peu que les trajets consécutifs je réunis en un seul.

e) Une autre propriété importante est l'<u>existence</u> dans (M, •) d'un <u>élément neutre</u>. De tels éléments, qui, composés à gauche ou à droite avec <u>a</u> M redonnant <u>a</u> et ont donc un comportement "neutre", sont 0 dans (Z, +), 1 dans (N,.) et 1 dans l'ensemble des applications du plan dans lui-même relativement à o. D'après ces exemples on a donc pour un tel élément neutre appartenant à M :

$$a \bullet \nu = \nu \bullet a = a \qquad (20)$$

Ce qui définit la notion d'élément neutre.
On rencontre aussi des éléments neutres dans d'autres structures de notre collection d'exemples : dans $(N, \bullet_4)$ et $(N, \bullet_5)$ 1 est le seul élément neutre ; dans $(E, \bullet_{14})$ c'est le point O ; dans A_n c'est 0 et dans (18) c'est 1 le seul élément neutre. Dans les autres cas il n'existe pas d'élément neutre. Un raisonnement simple montre que dans un monoïde existe au plus un élément neutre. En effet, de $\nu_1 \bullet \nu_2 = \nu_1$ et $\nu_1 \bullet \nu_2 = {}_2$ résulte que $\nu_1 = \nu_2$. Mais il peut

se produire qu'il existe plusieurs éléments neutres à droite ou neutres à gauche : dans $(N, \bullet_8)$ tout entier naturel est neutre à droite.

f) Pour achever la notion de groupe une dernière propriété importante est l'existence pour tout a de $(M, \bullet)$ d'un élément symétrique. C'est pour cette raison que furent introduits précédemment les nombres négatifs ; de tels éléments existent aussi dans l'ensemble des applications inversibles, le symétrique d'une application étant l'application inverse. Dans ces deux cas on a pour le symétrique a'

$$a' \bullet a = a \bullet a' = \nu \qquad (21)$$

Cette notion se transpose à toutes les structures admettant un élément neutre, ce qui amena aux recherches correspondantes. On examina en particulier si des ensembles d'applications étaient tels qu'à toute application correspond une application inverse. Dans ce but, il fallut établir des tables correspondantes comme par exemple pour l'ensemble (I, θ_1, θ_2) vu plus haut, la table :

A	A'
I	I
Θ_1	Θ_2
Θ_2	Θ_1

Ceci est aussi un exercice préliminaire important pour la recherche ultérieure de sous-groupes. A cette occasion, les élèves découvrirent la méthode permettant de reconnaître que tout élément admet un inverse s'il existe dans toute ligne et toute colonne l'élément neutre. De telles recherches sont très importantes dans l'enseignement en "Quarta" et "Untertertia". Citons comme exemples : des ensembles de rayures, des figures à symétrie axiale et leur formation à l'aide d'une figure partielle, des figures ayant un centre de répétition d'ordre n. La définition suivante fut donnée : une figure F admet le point D comme centre de répétition d'ordre n s'il existe une rotation $\Theta_1 = (D, \frac{360°}{n})$ telle que $F^{\theta_1} = F$.

Des expériences et des raisonnements simples montrèrent que non seulement Θ_1 mais aussi les rotations

$\Theta_2 = (D, 2.360°/n)$, ..., $\Theta_n = (D, n.360°/n) = (D, 0°) = I = \Theta_0$

transforment la figure F en elle-même. En outre, une figure F admettant un centre de répétition d'ordre n peut être définie à partir d'une figure élémentaire F_0.
Ce qui précède constitue un point de départ important pour l'étude des groupes cycliques.

g) La question de l'existence pour tout élément a de (M, •) d'un élément symétrique, amène à distinguer différents cas : dans $(N, \bullet_4)$ et $(N, \bullet_5)$ 1 seul admet un symétrique. Dans $(E, \bullet_{14})$ cependant tout élément P admet un symétrique et un seul, le point symétrique de P par rapport à O. Les élèves reconnurent de suite qu'il en est de même dans A_n, le symétrique de a étant tel que a + a' = n. Par contre (18) donna lieu à des surprises. D'abord O n'a pas de symétrique mais ceci est déjà connu pour les nombres rationnels car là aussi a.O = O pour tout a ; on n'a donc jamais a.O 1. Comme pour les nombres rationnels, il nous faut enlever zéro. Dans $(R^+, \bullet)$ tout élément admet un symétrique. Les $M_{n-1} = (\{1, 2, ..., n-1\}, \odot_n)$ ainsi obtenus présentent une particularité dont la découverte peut être laissée entièrement aux élèves : si n n'est pas premier, M_{n-1} n'est pas un monoïde car le O apparaît dans la table de la loi alors que O n'est pas un élément de M_{n-1}. Par contre, pour tous les nombres premiers p les M_{p-1} sont des monoïdes dont tout élément admet un symétrique. Après ces discussions, les monoïdes suivants furent retenus, comme présentant des particularités :

$(Z, +)$, $(R, +)$, $(R^+, .)$, A_n, M_{p-1} $(E°, \bullet_{14})$ et $(A(F), \circ)$ où $A(F)$ est l'ensemble des figures se déduisant d'une figure donnée F par isométrie (éventuellement directe). Tous ces monoïdes possèdent des propriétés communes permettant de définir la notion de groupe.

Définition : Un monoïde (M, •) est appelé un groupe lorsque :

(G1) Pour tous a, b, c M :

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \quad \text{(Loi associative)}$$

(G2) Il existe dans M un élément et un seul ν, appelé élément neutre de (M, •) tel que, pour tout a appartenant à M :

$$a \bullet \nu = \nu \bullet a = a$$

(G3) Pour tout a M il existe un élément et un seul a' de M, appelé élément symétrique de a, tel que :

$$a \bullet a' = a' \bullet a = \nu$$

Si en plus on a une loi commutative :

(K) Pour tous a, b de M :

$$a \bullet b = b \bullet a$$

alors (M, •) est dit un groupe commutatif ou abélien.

3. Exemples d'utilisation de groupes.

a) L'utilisation de la notion de groupe et le calcul sur les groupes fut particulièrement intense en "Untertertia" à propos de la géométrie. Le groupe des isométries fut construit à partir des symétries axiales et fut suivi de l'étude des sous-groupes. Plus particulièrement les rotations furent représentées comme produit de symétries par rapport à deux droites sécantes, les translations comme produit de symétries par rapport à deux droites parallèles.
Parmi les conséquences les plus importantes de cette étude, figuraient les cas d'égalité des triangles. A côté de deux définitions, nous allons énoncer certaines propriétés géométriques découlant de la théorie des groupes.

Définition : Une application A du plan sur lui-même est une isométrie si A est le produit d'un nombre fini n de symétries axiales. Si n est pair, A est dite une isométrie positive ou directe ; si n est impair, A est une isométrie négative ou inverse. (Remarque : cette première

définition, donnée tardivement, fut le fruit d'un long travail de précision dont l'intention primitive était de montrer que toute isométrie était le produit de symétries axiales par des rotations et des translations. Mais toutes ces notions devaient être tout d'abord explicitées, ce qui a pu être fait à l'aide des symétries. C'était pour moi un phénomène extraordinaire de voir la facilité avec laquelle les élèves ont compris le processus méthodologique. Leur enthousiasme et leur sérieux scientifique furent à la fin prépondérants pour l'extension du programme au niveau considéré.)

Proposition 1. Les rotations sont des isométries positives. L'ensemble des rotations de centre D forme un groupe abélien.
L'ensemble des rotations (D, k. $\frac{360°}{n}$) avec k=0, 1, ..., n-1 forme pour tout n un sous-groupe du groupe complet des rotations. Il consiste dans l'ensemble des isométries positives d'un polygone régulier à n côtés ayant pour centre D.

Proposition 2. Les translations sont des isométries positives. Elles forment un groupe abélien.

Proposition 3. L'ensemble des rotations (autour de points arbitraires) forme, à lui seul, mais réuni avec les translations, un groupe non abélien. Ce groupe est le groupe de toutes les isométries positives.

Proposition 4. L'ensemble de toutes les symétries centrales et des translations forme un groupe non abélien.

Proposition 5. L'ensemble de toutes les isométries forme un groupe. (Toute isométrie peut être considérée comme le produit de trois symétries axiales au plus. Toute isométrie est soit une rotation, soit une translation, soit le produit d'une symétrie par une translation.)

Définition : Deux figures F_1, F_2 sont dites égales ou congruentes (directement ou inversement) s'il existe une isométrie A (directe ou inverse) telle que $F_2 = A\ F_1$.

Proposition 6. La relation "congrue à" est une relation d'équivalence. L'ensemble des figures se décompose ainsi en classes de figures congruentes.

b) Pendant que ces considérations géométriques se déroulèrent, ainsi d'ailleurs que la plupart des considérations sur les groupes à partir de groupes concrets, je n'ai pas hésité à pousser une pointe prudente dans la direction de la théorie abstraite des groupes. On a commencé par établir les résultats simples suivants : si (M, •) est un groupe alors :

$a \bullet b = a \bullet c \Longrightarrow b \bullet c$ (simplification à gauche) (22 a)

$b \bullet a = c \bullet a \Longrightarrow b \bullet c$ (simplification à droite) (22 b)

$(a \bullet b)' = b' \bullet a'$ (23)

$(a')' = a$ (24)

Pendant le raisonnement, chaque élève a sans doute considéré un groupe bien déterminé. Il fut essentiel de constater que seuls les axiomes (G1), (G2), (G3) de la définition d'un groupe furent utilisés et que les conséquences qui en furent déduites étaient générales.
Pour établir (22 a) on utilise d'abord (G3). A tout a correspond son symétrique a' tel que $a \bullet b = a \bullet c$ donne par composition à gauche avec a': $a' \bullet (a \bullet b) = a' \bullet (a \bullet c)$. La loi associative (G1) autorise le déplacement de parenthèses : $(a' \bullet a) \bullet b = (a' \bullet a) \bullet c$. De (G3) résulte : $a' \bullet a = \nu$, d'où $\nu \bullet b = \nu \bullet c$. (G2) entraîne alors que $b = c$. Le premier contact avec un tel raisonnement fut pour les élèves de "Untertertia" quelque chose de fascinant. Ils sentirent que les axiomes d'un groupe ne servaient pas seulement à décrire les propriétés de certaines structures, mais qu'elles étaient des règles de jeu d'un jeu encore inconnu mais extrêmement attrayant. Un tel "jeu" aurait pu être considéré comme créé pour lui-même s'il n'y avait eu à chaque instant des questions d'interprétation. A propos de (23) les élèves pensèrent d'abord que $(a \bullet b)' = a' \bullet b'$. A côté du raisonnement, il est indispensable ici de donner des exemples de groupes non abéliens comme par exemple la représentation d'une rotation Θ comme produit de deux symétries axiales : $\Theta = g \circ h$. La rotation $\Theta' = (g \circ h)'$, opposée de Θ est en général différente de $g' \circ h' = g \circ h = \Theta$. Par contre $\Theta' = h' \circ g' = h \circ g$.
Ce n'est que pour des groupes abéliens que l'on peut affirmer de façon générale que $(a \bullet b)' = a' \bullet b'$ et là, comme pour (24) les élèves reconnurent des règles importantes qui jouent un rôle dans l'introduction des nombres négatifs, c'est-à-dire dans l'extension à un groupe :

$-(a + b) = -a + (-b)$ et $-(-a)$ a.

Les règles de simplification donnent lieu à des considérations importantes sur la construction de la table d'un groupe fini : dans chaque

ligne et chaque colonne de la table tout élément du groupe doit figurer une fois et une seule. En fait, si dans la ligne de a l'élément d se trouvait deux fois, mettons dans les colonnes des éléments b et c, alors $a \bullet b = a \bullet c = d$. D'après (22) on aurait $b = c$ ce qui est en contradiction avec notre convention tacite de n'écrire sur un bord de la table qu'une seule fois chaque élément de groupe.
Cette constatation donna lieu à d'importantes observations faites par les élèves :
Dans tout groupe de deux éléments le deuxième élément est involutif.
En fait, la table du groupe ($\{\nu, a\}$, $\bullet$) ne peut être que la suivante :

$\bullet$	ν	a
ν	ν	a
a	a	ν

inversement si a est involutif dans (M, $\bullet$) c'est-à-dire si $a \neq \nu$ et $a \bullet a = \nu$, alors ($\{\nu, a\}$, $\bullet$) est un groupe.
De même tous les groupes d'ordre 3 possèdent des propriétés communes ; en rangeant les éléments dans un ordre convenable, on obtient la seconde et la troisième ligne par permutations circulaires de la première.
Dans ce cas, la table du groupe est la suivante :

	ν	a	b
ν	ν	a	b
a	a	b	ν
b	b	ν	a

c) Une construction particulièrement importante est celle de la table des isométries du carré. A côté des rotations $\Theta_0 = I = (D, 0°)$, $\Theta_1 = (D, 90°)$, $\Theta_2 = (D, 180°)$, $\Theta_3 = (D, 270°)$ interviennent aussi les symétries axiales. Le premier travail consistait à établir la table de la loi de composition. D'ailleurs, juste avant cette étude, on avait montré que toute rotation pouvait être considérée comme le produit de deux symétries par rapport à des droites convenables. Plusieurs bons élèves sont parvenus, après peu d'indications, à découvrir seuls un procédé algébrique. Il s'agit ici d'une application simple des propriétés des groupes systématiquement utilisés plus tard pour composer des rotations et des similitudes quelconques. Les élèves plus lents se contentèrent d'abord de considérations basées sur des figures, puis arrivèrent rapidement, eux aussi, au procédé algébrique, plus élégant.

Le caractère de groupe se déduisait immédiatement de l'examen de la table : l'ensemble est fermé pour la loi , il contient l'application identique, celle-ci figurant une fois et une seule dans chaque ligne et chaque colonne. De là résulte (d'après un raisonnement fait par les élèves) que tout élément de l'ensemble admet un symétrique, ce que l'on peut d'ailleurs établir assez facilement en déterminant directement les applications inverses.

La conclusion générale, que l'ensemble des isométries d'une figure forme un groupe, n'intervint que plus tard.
Le travail suivant consistait à déterminer tous les sous-groupes du groupe précédent noté "G_8". Au point de vue didactique, la résolution de ce problème fut extraordinairement féconde.

Résumé of the Article

THE TREATMENT OF THE THEORY OF GROUPS AND CALCULATION IN GROUPS IN THE 3rd AND 4th YEARS OF SECONDARY EDUCATION

H.G. Steiner

The author presents a report on an experimental course on the elementary theory of groups carried out in a class of pupils of 14 and 15 years old during a period of three semesters. The course had been prepared already in the preceding semester when the following subjects were treated:

1. Order in different sets of numbers.

2. Representation of a number in the p - adic system with p not equal to 10: calculations in that system.

3. Negative rational numbers.

4. Basic logical notions.

5. The language and symbols of set theory.

6. The Euclidean plane as a set of points.

7. Geometric preliminaries related to the ruler and protractor.

8. Various mappings of the plane upon itself.

In the sequel the notion of a group is introduced in an inductive manner basing it on several examples and counter-examples from different sources, each property of the group arising in a natural manner from the exercises carried out by the pupils themselves. This part of the course leads to the precise definition of a group.

The work had been organized partly to produce a deeper understanding of the theory of groups and partly to illustrate notions acquired (group of geometric congruences and their sub-groups, factorization of the congruences into axial symmetries, theorems deduced from the definition of a group permitting the carrying out of certain computations, particular finite groups of the 2nd, 3rd and 4th orders and their different models, theorem of Lagrange).

The presentation of this experimental course which is very detailed and concrete gives the author ample opportunity to stress some important aspects of modern mathematics teaching.

SECTION III

CONGRES, REUNIONS, SEMINAIRES INTERNATIONAUX 1964 & 1965

INTERNATIONAL CONGRESSES, MEETINGS AND SEMINARS, 1964 & 1965

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

comme sujet des travaux des Congrès, réunions et séminaires internationaux (1964-1965)

Les programmes et les rapports concernant les Congrès internationaux consacrés totalement ou en partie aux problèmes de l'enseignement des mathématiques et organisés en 1964, 1965 prouvent que la réforme de cet enseignement a dépassé déjà l'étape de la recherche préliminaire et des projets. Les expériences organisées par les centres particulièrement actifs dans certains pays ont permis, non seulement de mettre en relief les programmes élaborés d'une manière précise et détaillée, mais aussi des renseignements concrets concernant leur réalisation pédagogique en classe et la présentation moderne dans certains manuels.

Cette concrétisation évidente des travaux en question a révélé d'autre part des problèmes très importants encore ouverts et exigeant des solutions fondées soit sur la recherche interdisciplinaire ou sur l'étude comparative à l'échelle internationale.

Les questions suivantes se sont avérées les plus pressantes :

1) La coordination de l'enseignement moderne des mathématiques (aux différents niveaux) avec celui des autres sciences,

2) les aspects psychologiques et pédagogiques de l'enseignement basé sur les programmes modernes,

3) la préparation des enseignements et leur recyclage continu.

Une partie considérable des travaux exécutés au cours des rencontres internationales en 1964 et 1965 a été consacrée à la première question. Les résultats obtenus ont été concrets et très importants. En particulier, grâce aux efforts des groupes interdisciplinaires, on a pu élaborer des projets de programmes de mathématiques formant la base moderne pour l'étude de la physique, de la chimie, de la biologie et de la géologie, ainsi que des indications générales d'ordre pratique relatives à la coordination de ces sujets, aussi bien du point de vue de leur contenu que de l'organisation et de la pédagogie de leur étude.

Le postulat de la rédaction de documents concernant les notions fondamentales qui appartiennent au patrimoine commun de la science a donc trouvé sa première réalisation; des travaux semblables sont initiés et confirmés par la Commission internationale de l'Enseignement des Sciences. Comme suite à une décision prise par le Congrès de Dakar, on va préparer un ouvrage d'Exemples sélectionnés d'applications des mathématiques à d'autres sciences, destiné à l'usage des professeurs d'écoles secondaires (classes supérieures).

Le problème de la coordination de l'enseignement des mathématiques et des autres sciences a été envisagé profondément à beaucoup de points de vue (progrès économique, développement culturel de l'individu, etc.)

Les aspects psychologiques et pédagogiques de la modernisation de l'enseignement des mathématiques ont été discutés aussi assez largement au cours des congrès internationaux ayant lieu en 1964-65, soit comme thème principal de la réunion ou se trouvant en marge des autres problèmes. D'un côté, on a mis en évidence certains principes de base, de l'autre on a présenté des expériences déjà achevées concernant le traitement en classe des fragments du programme exigeant une pédagogie particulièrement perspicace. A la base, d'importantes difficultés se sont révélées dans la problématique psychologique, étant donné que la modernisation des mathématiques ne peut pas devenir effective sans l'harmonisation de la recherche active de l'élève et de la construction structurée a priori des mathématiques élémentaires dans leur conception moderne. Les discussions assez vagues n'ont pas conduit à des conclusions claires et pratiquement utilisables. La question a été néanmoins expressément posée, comme question ouverte et difficile.

La conception de la préparation moderne en mathématiques même de futurs professeurs et de leur formation continue post-universitaire semble devenir de plus en plus clairs et universelle. Au contraire, les opinions concernant la préparation pédagogique sont encore assez peu précisées, se bornant à la formulation de certaines demandes et de certains postulats. On peut néanmoins constater que cette question se manifeste comme très importante au cours des conférences et des discussions.

La revue concise des travaux exécutés par les congrès internationaux organisés en 1964 et 1965 met en évidence le progrès continu dans la réforme, les problèmes plus ou moins résolus, et signale aussi les questions déjà expressément posées, mais attendant encore un traitement plus profond et plus précis.

THE TEACHING OF MATHEMATICS

as a subject of work at International Congresses (1964-1965)

The programmes and reports relating to international congresses devoted totally or in part to the problems of mathematics teaching which have been organized in 1964 and 1965 prove that the reform of this teaching has already gone beyond the stage of preliminary research and of projects. The experiments which have been organized by the most active centres in certain countries have not only brought out the programmes developed in a precise and detailed manner, but also have given concrete information about the realization of these programmes in the classroom and the modern presentation in certain handbooks.

This fact that the problems have now been made concrete has in turn revealed problems which are very important which are still not solved and which demand solutions depending either on interdisciplinary research or on a comparative study at the international level.

The following questions have been establised as the most urgent :

1) The coordination of modern mathematics teaching (at different levels) with that of other sciences.

2) The psychological and pedagogical aspects of teaching based on the modern programmes.

3) The preparation of teachers and their continuous retraining.

A considerable part of the work carried out during the international meetings in 1964 and 1965 has been devoted to the first question. The results obtained have been concrete and very important. In particular, thanks to the efforts of the interdisciplinary group, mathematical programmes have been developed giving a modern basis for the study of physics, of chemistry, of biology and of geology. General indications of a practical nature have been given about the coordination of these subjects, both from the point of view of content and of their presentation.

The production of documents concerning fundamental notions which belong to the common heritage of science has therefore found its first realization: similar work has been initiated by the International

Commission for the teaching of sciences. As a consequence of a decision taken at the Dakar congress, there is in preparation a book of selected examples of the applications of mathematics to other sciences, especially designed for the use of secondary school teachers (higher classes).

The problem of the coordination of mathematics teaching and of other sciences has been given profound study from many points of view (economic progress, cultural development of the individual, etc.)

The psychological and pedagogical aspects of the modernization of mathematics teaching have been extensively discussed in the course of international congresses taking place in 1964-65, either as the principal topic of the meeting or as incidental to other problems. On the one hand certain basic principles have been established, and on the other hand completed experiments have been presented relating to the treatment in the classroom of a programme meeting a particularly clear piece of teaching. The basic difficulty has been revealed in the very important psychological problem in that the modernization of mathematics cannot become effective without having harmony between the active research of the pupil on the one hand and the constructions of elementary mathematics according to modern conceptions on the other. Vague discussions have not led to conclusions which are either clear or of use in practice. The question has nevertheless been put as an open and difficult one.

The conception of the modern training in mathematics of future teachers and of their continuous training during the post university period seems to become more and more clear and universal. On the other hand, opinions concerning pedagogical training seem less precise, and are limited to the formulation of certain conditions. It is however to be noted that this question is accepted as very important during conferences.

The concise review of works carried out by international congresses organized in 1964 and 1965 reveals continuous progress in reform, mentions problems more or less solved, and draws attention to questions which have been put but which need a deeper and more precise treatment.

IIIème SEMINAIRE d'ENTEBBE - MATHEMATIQUES

Ouganda, 5 Juillet - 15 Août 1964

60 participants de 12 pays (Ethiopie, Ghana, Kenya, Libéria, Malaya, Nigeria, Sierra Leone, Tanzania, Ouganda, Royaume-Uni, Etats-Unis, Zambie) ont continué les travaux mis en ouvre au cours des deux séminaires précédents organisés par le Centre d'Entebbe-Mathématiques, sous la direction du Professeur W. T. Martin.

La première session plénière a été consacrée aux rapports des pays suivants: Ghana, Kenya, Libéria, Nigeria, Tanzania, Ouganda, Zambie et Zanzibar concernant le développement de l'enseignement des mathématiques dans ces pays, la préparation des maîtres et les différentes activités des centres régionaux dans ce domaine. Les rapports ont mis en lumière la portée, l'utilité et l'importance de travaux faits par le Centre d'Entebbe-Mathematiques.

Par la suite, les participants du Séminaire ont constitué quatre groupes de travail concernant : 1) l'enseignement primaire, 2) l'enseignement secondaire, 3) les textes, 4) la préparation des maîtres. Le premier groupe, dont les travaux ont été dirigés par le Professeur Clarence Hardgrove, a réuni 13 participants, (maîtres d'enseignement primaire, professeurs de mathématiques universitaires, inspecteurs). On a effectué la revision de l'esquisse du programme pour les troisième, quatrième, cinquième et sixième années de l'enseignement et on a préparé en groupe les manuels pour les élèves de la troisième année, ainsi que le guide pour le maître.

19 participants (professeurs d'enseignement secondaire et d'université) s'occupèrent de problèmes de l'enseignement secondaire. Au cours des travaux dirigés par le Professeur Kathleen Collard, on a préparé le manuel pour la troisième année de l'école secondaire, on a élaboré le plan détaillé pour les deux années suivantes, et on a rédigé le programme d'examen pour le premier niveau de l'enseignement secondaire.

Le groupe s'intéressant à la question des textes a réuni 8 participants. Sous la direction de M. Christopher Moely, on a revisé les textes préparés au cours du séminaire de 1963 et on a établi de nouveaux textes pour l'enseignement secondaire.

13 participants se sont occupés de la préparation de textes d'étude pour les maîtres (structure de l'arithmétique et fondements de la géométrie). Ces travaux ont été exécutés sous la direction du Professeur A. L. Putnam et du Professeur Donald Richmond.

La deuxième session plénière a été consacrée aux questions suivantes, vivement discutées :

a) la situation concernant l'enseignement de la géométrie à l'école secondaire (revue comparative des axiomatiques différentes, projet d'une nouvelle axiomatique),

b) le projet du programme pour le premier niveau de l'école secondaire,

c) le problème de la réduction à quatre années de la durée de l'enseignement secondaire en Afrique Occidentale.

Les détails des travaux effectués au cours du Séminaire se trouvent dans la brochure intitulée : "A report of an African Education Program", publiée par Educational Services Incorportated, 108 Water Street, Watertown, Massachusetts 02I72, 1965, p. 25. L'édition préliminaire des textes élaborés par le Séminaire a été publiée aussi par Educational Services Incorporated, Watertown, Massachusetts, sous le titre "Mathematics".

111rd SEMINAR AT ENTEBBE - MATHEMATICS.

Uganda 5 July - 15 August 1964

60 participants from 12 countries (Ethiopia, Ghana, Kenya, Liberia, Malaya, Nigeria, Sierra Leone, Tanzania, Uganda, United Kingdom, United States, Zambia) continued the work which had been started in two preceding seminars organized by the Entebbe Mathematical Centre, under the direction of Professor W.T. Martin.

The first plenary session was devoted to reports from Ghana, Kenya, Liberia, Nigeria, Tanzania, Uganda, Zambia and Zanzibar on the development of mathematical teaching in those countries,on the training of teachers and on various activities of the regional centres. The reports stressed the significance, the usefulness, and the importance of the work carried out by the Entebbe Mathematics group.

Later the members of the seminar made up four working groups dealing with : 1) primary education, 2) secondary education, 3) texts, 4) the training of teachers. The first group, whose work was directed by Professor Clarence Hardgrove had 13 members (primary school teachers, university professors of mathematics, inspectors). This group carried out the revision of the outline programmes for the third, fourth, fifth and sixth year of teaching and handbooks were prepared for pupils of the third year, together with a guide for the teacher.

19 members (secondary school and university teachers) dealt with the problem of secondary education. The working group was directed by Professor Kathleen Collard. A handbook was prepared for the third year of secondary education. A detailed plan for the following two years was prepared, and the programme for examinations for the first level of secondary education was drawn up.

The group concerned with texts consisted of 8 members under the direction of Mr. Christopher Moely. The texts prepared during the 1963 seminar were revised, and new texts for secondary education were prepared.

Another 13 members worked on texts for study by mathematics masters (structure of arithmetic and foundations of geometry). This was carried out under the direction of Professors A. L. Putnam and Donald Richmond.

During the second plenary session there was lively discussion on the following questions :-

a) the state of geometry teaching in secondary schools (comparative review of different axiomatics)

b) the proposed programme for the first level at secondary school

c) the problem of reducing to four years the period of secondary education in West Africa.

The details of the work carried out during the seminar can be found in a brochure entitled "A report of an African Education Programme", published by Educational Services Incorporated, 108, Water Street, Watertown, Massachusetts O2I72, 1965, p. 25. The preliminary edition of the texts developed by the seminar are also published by Education Services Incorporated, Watertown, Massachusetts, under the title "Mathematics".

XVIIIème RENCONTRE INTERNATIONALE DE PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES ORGANISEE PAR LA COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Oberwolfach, Allemagne, 9-16 Août 1964

Thème général : Contribution de la psychologie à l'enseignement des mathématiques modernes.

La rencontre, dont les travaux ont été dirigés par le Président de la Commission, le Professeur G. Papy, a réuni 45 participants de 9 pays (8 européens et 1 africain). Le programme détaillé a prévu les problèmes suivants :

1) Importance de la contribution de la psychologie à l'enseignement moderne des mathématiques,
2) Psychologie de la pensée.
3) Structures perceptives et structures opérationnelles.
4) Aspects psychologiques de l'enseignement des mathématiques.
5) Psychologie interne des mathématiques d'aujourd'hui.
6) Problèmes psychologiques liés à l'étude des structures mathématiques.
7) Thèmes de la recherche psychologique importants pour l'enseignement.

Cette problématique a été traitée par les participants en séances plénières, sans conférences individuelles préparées d'avance.

Du point de vue de la psychologie, deux conceptions différentes ont été présentées et discutées, à savoir : le point de vue phénoménologique et celui de la psychologie opérationnelle, développée dans l'école de J. Piaget. L'importance de la seconde a été soulignée par les participants mathématiciens, particulièrement actifs au sein du mouvement de la modernisation des mathématiques (Centre Belge de la pédagogie de la mathématique.)

La discussion assez vague, peut-être à cause de l'absence de psychologues professionnels s'interessant à l'enseignement moderne des mathématiques, n'a pas conduit à des conclusions plus précises. Néanmoins, elle a permis de mettre en évidence l'importance de la collaboration des mathématiciens et de psychologues ayant certaines connaissances en mathématiques d'aujourd'hui et comprenant l'esprit moderne des mathématiques élémentaires.

18th INTERNATIONAL MEETING OF MATHEMATICS TEACHERS ORGANIZED BY THE INTERNATIONAL COMMISSION FOR THE STUDY AND THE IMPROVEMENT OF MATHEMATICS TEACHING

Oberwolfach, Germany. 9 - 16 August, 1964

General Theme :- Contribution of psychology to the teaching of modern mathematics.

The meeting whose work was directed by the President of the Commission, Professor G. Papy, had 45 members from 9 countries (8 Europeans and 1 African). The detailed programme considered the following problems :

1) The importance of the contribution of psychology to the modern teaching of mathematics.
2) Psychology of thinking.
3) Perceptive and operational structures.
4) Psychological aspects of mathematical teaching.
5) Interior psychology of mathematics today.
6) Psychological problems connected with the study of mathematical structures.
7) Themes of psychological research which are important in teaching.

These problems were treated by the members during plenary sessions, without individual lectures prepared in advance.

From the point of view of psychology, two different conceptions were presented and discussed, namely :

The phenomenological point of view and that of operational psychology, developed in the school of J. Piaget. The importance of the second was underlined by the mathematical members who are particularly active in the movement to modernize mathematics (the Belgian centre of mathematics teaching).

The rather vague discussion due perhaps to the absence of professional psychologist interested in the modern teaching of mathematics, did not

lead to any precise conclusions. Nevertheless the discussion did bring out the importance of collaboration between mathematicians and psychologists who have some knowledge of the mathematics of today including the modern approach to elementary mathematics.

COLLOQUE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

organisé par le Centre international d'Etudes pédagogiques de Sèvres

Sèvres, France, 28 Septembre - 3 Octobre 1964

Le colloque a réuni 20 représentants de 8 pays européens.

Du point de vue des nouvelles tendances dans l'enseignement des mathé matiques, il faut mentionner la place qui a été attribuée, au cours du colloque, au problème de la coordination de l'enseignement des mathématiques et de celui de la physique. On a souligné le danger qu'apporte l'introduction, par le physicien, des notions mathématiques nécessaires à l'enseignement de la physique, avant que celles-ci ne soient élaborées au sein des mathématiques élémentaires (manque de précision, voies indirectes et artificielles, conditionnant la pensée mathématique de l'élève, perte de temps, etc.)

Les participants du colloque ont constaté que les connaissances mathématiques comme celles du calcul vectoriel, du calcul approximatif, des équations différentielles, des probabilités, doivent être enseignées assez tôt, en vue de pouvoir les appliquer en physique. D'autre part, le physicien devrait utiliser les définitions, les symboles et le langage mathématique en accord complet avec la manière dont on les utilise dans l'enseignement moderne des mathématiques.

COLLOQUIUM ON THE TEACHING OF PHYSICS

Organized by the International Centre of Pedagogical Studies of Sevres

Sèvres, France, 28 September - 3 October, 1964

This colloquium had 20 representatives from 8 European countries.

From the point of view of the new trends in the teaching of mathematics, mention must be made of the place given, during the colloquium, to the problem of the coordination of the teaching of mathematics and that of physics. Members underlined the dangers involved in the introduction, by the physicist, of mathematical notions necessary to the teaching of physics before these notions have been developed in elementary mathematics (lack of precision, indirect and artificial methods, conditioning of the mathematical thinking of the pupil, loss of time, etc.)

The members of the colloquium considered that mathematical topics such as vector calculus, approximations, differential equations, probability, should be mastered early, in order to apply them in physics. On the other hand, the physicist should use the definitions, the symbols and the language of mathematics in complete accord with the way in which they are used in the modern teaching of mathematics.

Conférence sur le thème

LES MATHEMATIQUES A L'ENTREE DE L'UNIVERSITE

SITUATION REELLE ET SITUATION DESIRABLE

organisée par le Centre Européen de l'Education, avec le concours de la Commission internationale de l'Enseignement des Mathématiques (CIEM)

Frascati, Italie, 8-10 Octobre 1964

La rencontre a réuni 27 participants de 5 pays européens et de l'Argentine. Au cours de douze conférences on a analysé la situation actuelle concernant la transition de l'étude secondaire des mathématiques à celle de l'université et aux grandes écoles. On a essayé de mettre en évidence les objectifs principaux qui devraient être pris en considération dans l'amélioration de cette situation, pour diminuer le fossé qui sépare l'étude supérieure des mathématiques modernes de celle des mathématiques scolaires traditionnelles. L'accent a été mis sur les problèmes de l'enseignement secondaire des mathématiques (conférences des Professeurs Mme J. Lelong, Desforge, Steiner, Papy, Walusinski, Kirsch, Revuz, De Finetti).

D'autre part, on a pris en considération la situation de l'enseignement des mathématiques au cours des deux premières années de certaines universités et de certaines grandes écoles (conférences des Professeurs Behnke, Deheuvels, Manara, Pickert, Bass et Kjellberg).

Cette confrontation a mis en relief la nécessité d'une modernisation profonde de l'enseignement des mathématiques au niveau scolaire et les résultats déjà obtenus dans ce domaine dans les pays avancés dans la réforme.

Conference on the topics

MATHEMATICS AT THE COMING TO UNIVERSITY

REAL SITUATION AND DESIRABLE SITUATION

organized by the European Center of Education with the participation of the International Commission for the study and the Improvement of Mathematics teaching (CIEM)

Frascati, Italy, 8 - 10 October 1964

The Meeting had 27 members from 5 countries (europeans and Argentine). During 12 sessions the actual situation concerning the transition from the secondary schools teaching of mathematics to the University and Engineering colleges teaching has been analized. Members underlined the principal aims which should be considered to improve this situation and to fill in the gap which separates the higher teaching of modern mathematics and that of the traditionnel school mathematics. The stress was laid on the problems of the secondary school mathematics (lectures by Mme J. Lelong, M. Desforge, Steiner, Papy, Walusinski, Kirsch, Revuz, De Finetti).

On the other hand they considered the situation of the mathematics teaching during the first two years in certain universities and colleges (lectures by Behnke, Deheuvels, Manara, Pickert, Bass and Kjellberg).

This comparison has revealed the necessity of a deep modernization of the teaching of mathematics at the school level and the results already obtained in this field by some countries in which the reform is advanced.

SEMINAIRE SUR L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE EN ASIE DU SUD-EST

organisé par l'Association des Instituts d'Enseignement supérieur du sud-est asiatique

Saïgon et Dalat, 9 - 13 Novembre 1964

Le séminaire a réuni 20 participants représentant les universités de Malaya, Singapour, Thaïlande et du Vietnam.

Les conférenciers ont présenté l'état actuel de l'enseignement des mathématiques aux différents niveaux, à savoir les programmes et les méthodes utilisées dans les pays participants, ainsi que les tendances nouvelles concernant l'enseignement scolaire et la préparation mathématique des professeurs, des ingénieurs, des economistes et des chercheurs en mathématiques mêmes.

Les conclusions finales ont été formulées comme suit :

1) Une tâche urgente se présente à nous, celle de la formation de professeurs de classes supérieures des écoles secondaires et des universités, pour remédier à la grande pénurie actuelle de tels maitres dans le sud-est asiatique.

2) On devrait donner le plus possible une éducation gratuite. Il faudrait, dans ce but, solliciter une aide financière, auprès des gouvernements, des industries et des pays étrangers.

3) L'étude des mathématiques est d'une grande valeur pour la formation de l'esprit au raisonnement logique dans tous les types de problèmes, et devrait être une partie intégrante de tous les cours d'éducation. On devrait enseigner les mathématiques comme un sujet important, d'une valeur pratique, tout à fait à part de leur valeur esthétique. Dans les pays en voie de développement, parmi les buts principaux de l'enseignement des mathématiques, il faudrait comprendre les applications pratiques de celles-ci.

4) L'utilité des mathématiques et des machines à calculer dans leur application aux comptes, à l'évaluation des taxes, à la planification de l'économie industrielle, aux besoins des ingénieurs, etc. devrait être exploitées et propagée. Trop peu

de gens sont au courant du pouvoir de ces outils.

5) Un centre de calcul devrait être établi dans un pays au moins du sud-est asiatique. Même si au début la construction d'un tel centre soulève des difficultés, le bénéfice que l'on en retirera fera plus que justifier sa création.

6) Une coopération plus intensive devrait être établie entre les mathématiciens du sud-est asiatique.

7) Il serait utile et intéressant de prouver, par des expériences de laboratoire, que toutes les personnes normales peuvent apprendre et comprendre les mathématiques.

8) Les départements d'universités devraient faire les efforts nécessaires pour se tenir au courant des réformes modernes.

9) La réforme concernant les moyens d'instruction dans les diverses langues nationales du sud-est asiatique crée un besoin de nouveaux manuels. La réimpression devenue nécessaire offre une occasion unique pour la revision des programmes. Cette occasion de modernisation ne doit pas être manquée.

10) Des conceptions modernes, telles qu'ensembles, applications, séries, devraient être enseignées aux étudiants dès leur jeune âge. On devrait donner plus d'attention qu'on ne le fait aujourd'hui, à la géométrie dans l'espace à 3 dimensions et aux statistiques, pour les enfants des écoles secondaires.

11) On devrait apprendre aux maîtres actuels les conceptions nouvelles et modernes, ainsi que la manière de les enseigner.

12) Le niveau de connaissances d'un maître devrait être plus élevé que le niveau le plus haut auquel il enseigne.

13) Il y a danger pour les mathématiques de devenir une discipline isolée, ayant peu ou pas de relation avec d'autres sujets et problèmes contemporains.

14) Les étudiants dont les mathématiques sont le sujet principal d'étude devraient apprendre moins de physique et de chimie qu'à présent. D'autre part, on devrait conseiller aux mathématiciens d'étudier des sujets tels que la biologie, la biométrie, la physique, la bio-physique et surtout on devrait écrire des textes sur ces sujets pour mathématiciens.

15) Le problème existe de rendre les idées mathématiques compréhensibles aux physiciens et autres scientifiques. Le

"livre de cuisine" type d'enseignement devrait être évité. Il serait mutuellement bénefique que les mathématiciens aident les étudiants en physique dans les mathématiques et que les physiciens guident les étudiants en mathématiques dans leurs cours d'instruction mathématique.

16) Les savants seraient encouragés à travailler en équipes et une collaboration plus intensive entre différentes disciplines est hautement désirable . Des séminaires en commun et et le partage de commodités et autres facilités peut aider à ce développement.

17) L'amélioration des bibliothèques est essentielle. Sans cela il y a peu d'espoir de progrès dans le sud-est asiatique, au point de vue éducation mathématique.

18) L'amour de la lecture et de la recherche mathématique devrait être cultivé dans les écoles et les universités. L'école mathématique "Olympiade", telle qu'elle existe en Hongrie et en Russie, ainsi que la publication de journaux d'étudiants, sont une aide pour obtenir cette qualité.

19) Actuellement, beaucoup parmi les meilleurs étudiants en mathématiques du sud-est asiatique qui, à l'aide de bourses, font des études supérieures à l'étranger, ne retournent pas dans leur pays, en raison d'un attachement sentimental à l'etranger ou en raison de difficultés dans leur pays, au point de vue économique et politique. Ceux qui rentrent deviennent si surchargés par leur enseignement et leurs responsabilités administratives, et ils ont si peu de facilités dans les bibliothèques, qu'ils trouvent de grandes difficultés pour continuer leurs recherches.

En vue de ces arguments, la nécessité s'impose de former de jeunes mathématiciens pour la recherche dans leur propre pays.

20) Des étrangers expérimentés, capables, et possédant une bonne formation pour guider et stimuler les études des jeunes mathé maticiens du sud-est asiatique devraient être encouragés à visiter les contrées du sud-est asiatique. Après un stage minimum de 3 mois, ou plus long si possible, les jeunes mathématiciens pourraient débuter leurs recherches qui pourraient ensuite être guidées par correspondance.

Les frais encourus pour envoyer de tels visiteurs en Asie du Sud-est seraient moins importants que pour envoyer des

de gens sont au courant du pouvoir de ces outils.

5) Un centre de calcul devrait être établi dans un pays au moins du sud-est asiatique. Même si au début la construction d'un tel centre soulève des difficultés, le bénéfice que l'on en retirera fera plus que justifier sa création.

6) Une coopération plus intensive devrait être établie entre les mathématiciens du sud-est asiatique.

7) Il serait utile et intéressant de prouver, par des expériences de laboratoire, que toutes les personnes normales peuvent apprendre et comprendre les mathématiques.

8) Les départements d'universités devraient faire les efforts nécessaires pour se tenir au courant des réformes modernes.

9) La réforme concernant les moyens d'instruction dans les diverses langues nationales du sud-est asiatique crée un besoin de nouveaux manuels. La réimpression devenue nécessaire offre une occasion unique pour la revision des programmes. Cette occasion de modernisation ne doit pas être manquée.

10) Des conceptions modernes, telles qu'ensembles, applications, séries, devraient être enseignées aux étudiants dès leur jeune âge. On devrait donner plus d'attention qu'on ne le fait aujourd'hui, à la géométrie dans l'espace à 3 dimensions et aux statistiques, pour les enfants des écoles secondaires.

11) On devrait apprendre aux maîtres actuels les conceptions nouvelles et modernes, ainsi que la manière de les enseigner.

12) Le niveau de connaissances d'un maître devrait être plus élevé que le niveau le plus haut auquel il enseigne.

13) Il y a danger pour les mathématiques de devenir une discipline isolée, ayant peu ou pas de relation avec d'autres sujets et problèmes contemporains.

14) Les étudiants dont les mathématiques sont le sujet principal d'étude devraient apprendre moins de physique et de chimie qu'à présent. D'autre part, on devrait conseiller aux mathématiciens d'étudier des sujets tels que la biologie, la biométrie, la physique, la bio-physique et surtout on devrait écrire des textes sur ces sujets pour mathématiciens.

15) Le problème existe de rendre les idées mathématiques compréhensibles aux physiciens et autres scientifiques. Le

"livre de cuisine" type d'enseignement devrait être évité. Il serait mutuellement bénefique que les mathématiciens aident les étudiants en physique dans les mathématiques et que les physiciens guident les étudiants en mathématiques dans leurs cours d'instruction mathématique.

16) Les savants seraient encouragés à travailler en équipes et une collaboration plus intensive entre différentes disciplines est hautement désirable . Des séminaires en commun et et le partage de commodités et autres facilités peut aider à ce développement.

17) L'amélioration des bibliothèques est essentielle. Sans cela il y a peu d'espoir de progrès dans le sud-est asiatique, au point de vue éducation mathématique.

18) L'amour de la lecture et de la recherche mathématique devrait être cultivé dans les écoles et les universités. L'école mathématique "Olympiade", telle qu'elle existe en Hongrie et en Russie, ainsi que la publication de journaux d'étudiants, sont une aide pour obtenir cette qualité.

19) Actuellement, beaucoup parmi les meilleurs étudiants en mathématiques du sud-est asiatique qui, à l'aide de bourses, font des études supérieures à l'étranger, ne retournent pas dans leur pays, en raison d'un attachement sentimental à l'etranger ou en raison de difficultés dans leur pays, au point de vue économique et politique. Ceux qui rentrent deviennent si surchargés par leur enseignement et leurs responsabilités administratives, et ils ont si peu de facilités dans les bibliothèques, qu'ils trouvent de grandes difficultés pour continuer leurs recherches.

En vue de ces arguments, la nécessité s'impose de former de jeunes mathématiciens pour la recherche dans leur propre pays.

20) Des étrangers expérimentés, capables, et possédant une bonne formation pour guider et stimuler les études des jeunes mathé maticiens du sud-est asiatique devraient être encouragés à visiter les contrées du sud-est asiatique. Après un stage minimum de 3 mois, ou plus long si possible, les jeunes mathématiciens pourraient débuter leurs recherches qui pourraient ensuite être guidées par correspondance.

Les frais encourus pour envoyer de tels visiteurs en Asie du Sud-est seraient moins importants que pour envoyer des

des Asiatiques du sud-est à l'étranger en prenant note du gaspillage indiqué au paragraphe 19 ci-dessus.

21) Des cours d'été de mathématiques modernes avancées et destinés à la fois aux mathématiciens d'un niveau élémentaire et d'un niveau élevé, devraient être ouverts regulièrement dans le sud-est asiatique. Chaque cours devrait durer au moins deux semaines.

22) Il faudrait donner au personnel de l'Université un congé d'étude. La redistribution du travail parmi les membres des départements peut soulager un ou deux membres à la fois, pour tout enseignement et autres tâches, pendant un trimestre. Ce trimestre, combiné avec de longues vacances, donne une période d'étude de 6 mois, pouvant être passée dans une université avec un programme actif de recherches mathématiques.

23) Des bourses de recherches devraient être fondées sur le modèle des universités anglaises. Le financement devrait être cherché parmi les industriels intéressés.

24) On devrait fonder au moins un Institut d'Etudes avancées comme corps autonome (c'est-à-dire indépendant du contrôle du gouvernement et de l'université) dans le sud-est asiatique, d'après le type des instituts de Bombay et d'Australie.

25) Tous les participants sont d'accord pour estimer que ce Séminaire a apporté une contribution réelle et durable à leur compréhension de chaque problème et a indiqué les lignes parmi lesquelles des solutions communes et individuelles peuvent être trouvées aux problèmes d'éducation mathématique dans le sud-est asiatique.

Le rapport détaillé concernant le Séminaire a été publié sous le titre : "ASAIHL - Seminar on Mathematical Education in Southeast Asia", par "The Association of Southeast Asian Institutions of Higher Learning".

SEMINAR ON MATHEMATICS TEACHING IN SOUTH-EAST ASIA

organized by the Association of the South-East Asian Institutes of higher education.

Saigon and Dalat, 9 - 13 November, 1964

The Seminar had 20 members representing the Universities of Malaya, Singapore, Thailand and of Vietnam.

The members of the conference presented the actual state of mathematics teaching at different levels, the programmes and the methods used in the participating countries, together with the new trends in the mathematical training of teachers, of engineers, of economists and of mathematical research workers.

The final conclusions were set out as follows :

1) An urgent task faces us, of training teachers for the higher classes of secondary schools and of universities, to remedy the great scarcity of such teachers in south-east Asia at the moment.

2) There should be the maximum possible amount of free education. When necessary, financial aid should be sought from gouvernment, industry and from foreign countries.

3) The study of mathematics has great value in training for logical reasoning in dealing with all types of problems, and should be an integral part of all educational courses. Mathematics should be taught as an important subject, of a practical value, quite apart from its aesthetic value. In developing countries, among the principal objectives of mathematics teaching, the practical applications should be understood.

4) The use of mathematics and of calculating machines in their application to accounts, to the assessment of taxes, to planning industrial development, to the needs of engineers should be expedited and propagated. Too few people are aware of the power of this tool.

5) A calculating centre should be established in at least one of the countries of south-east Asia. Even if difficulties arise in establishing such a centre at the beginning, its value will

be appreciated. Many people will come to know of its existence, and by useful work, could more than justify its creation.

6) A more intensive cooperation should be established between the mathematicians of south-east Asia.

7) It would be useful and interesting to prove, by laboratory experiments, that all normal persons are capable of understanding mathematics.

8) University departments must make the necessary efforts to keep abreast of modern reforms.

9) The reform in the means of instruction in the different languages of south-east Asia creates the need for new handbooks. This re-editing having become necessary offers a unique opportunity for the revision of the programmes. This chance for modernization should not be missed.

10) Modern notions, such as sets, mappings, series, must be taught to pupils from an early age. More attention should be given to geometry in three dimensional space and to statistics for children in secondary schools.

11) Those who are already teachers should be taught the new and modern notions, together with methods of teaching them.

12) The level of knowledge of a teacher should be higher than the highest level at which he is required to teach.

13) There is danger that mathematics becomes an isolated discipline, having little or no relation to other subject and modern problems.

14) Students whose principal field of study is mathematics should do less physics and chemistry than at present. On the other hand, mathematicians should be encouraged to study subjects such as biology, biochemistry, physics, biophysics, and texts on these subjects should be written for mathematicians.

15) There is the problem of making mathematical ideas comprehensible to physicists and other scientists. The "cook-book" type of teaching should be avoided. It would be of mutual benefit if the mathematicians helped the physics students in their mathematics, and if the physicists helped mathematics students during their course in mathematics.

16) Research workers should be encouraged to work in teams, and a more intensive collaboration between different disciplines is very desirable. Common seminars and the sharing of various facilities could aid this development.

17) The improvement of libraries is essential. Without this there can be little hope of progress in south-east Asia from the point of view of mathematical education.

18) A desire to read and do research in mathematics must be cultivated in schools and universities. The "Olympiad" mathematical school, such as exists in Hungary and in Russia, together with the publication of a students' journal, should help in developing this.

19) At the moment, many of the best students in mathematics from south-east Asia who do their higher studies abroad do not return to their own country, either because of a sentimental attachment to other countries or to economic and political difficulties in their own country. Those who do return find themselves so heavily loaded with teaching and administrative responsibilities, and have so few library facilities, that they have great difficulty in continuing their research work.

In view of these facts, it is necessary to train young mathematicians for research in their own countries.

20) Experienced foreigners who have a particular aptitude for guiding and stimulating young mathematicians should be encouraged to visit countries of south-east Asia. After a minimum stay of 3 months, or longer if possible, the young mathematicians could proceed with their own researchs which could later be guided by correspondence.

The expenses involved in sending such foreign visitors to south-east Asia would be less than that of sending the south-east Asians to study abroad, in view of the wastage indicated in paragraph 19 as above.

21) Summer courses in modern advanced mathematics should be organized regularly in south-east Asia. They should be suitable both for mathematicians at an elementary level and at a higher level. Each should last at least two weeks.

22) University teachers should have study leave. The redistribution of work among members of departments can relieve one or more members af a time of all teaching and other

duties of a term. This term, combined with a long vacation, can give a study period of 6 months, which can be passed in a university with an active research programme in mathematics.

23) Research scholarships should be established on the model of English Universities. Finance for the purpose should be sought among interested industrialists.

24) At least one Institute of Advanced study should be established in south-east Asia as an independent body (i. e. independent of the control of the government and of the university). This should be of the same type as the Institutes of Bombay and of Australia.

25) All the members agree that the seminar had made a real and durable contribution to their understanding of each problem and indicated lines along which solutions can be found to the problems of mathematical education in south-east Asia.

The detailed report on the seminar has been published under the title "ASAIHL - Seminar on Mathematical Education in South-East Asia" by "The Association of South-east Asian Institutions of Higher Learning".

COLLOQUE INTERNATIONAL SUR LES TENDANCES MODERNES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHEMATIQUES

organisé par la Commission internationale pour l'Enseignement des Mathématiques

Utrecht, Pays-Bas, 19-23 Décembre 1964

Le colloque, dirigé par le Professeur H. Freudenthal, a réuni 28 participants de 9 pays européens, des Etats-Unis, et du Canada. Au cours de 16 conférences présentées par les experts invités par la CIES, on a traité différents thèmes qu'on peut grouper selon les questions suivantes:

1) Les principes généraux de la réforme dans l'enseignement des mathématiques (Conférence de A. Wittenberg: Priorités et responsabilités dans la réforme de l'enseignement des mathé matiques).

2) Les comptes-rendus des travaux de certains centres concernant les programmes élaborés, le recyclage des maîtres et les autres activités (conférence de H. Freudenthal, H. Troelstra, L. R. J. Westermann, St. Straszewicz, M. Beberman, M. Thwaites, W. O. Storer, Th. J. Korthagen et J. van Lint.)

3) Les comptes-rendus des expériences déjà achevées dans l'enseignement modernisé et les projets concernant la mise en oeuvre de certains fragments des mathématiques élémentaires selon les programmes nouveaux (conférences : Analyse mathé matique - W. Servais et J. Dzewas; structures algébriques - W. G. Steiner; logique - A. Z. Krygowska; mathématique de premier cycle à l'école secondaire: L. Félix, E. Castelnuovo; le laboratoire mathématique : A. Delessert).

Les exposés et la discussion qui les a suivis, ont mis en relief l'état de la réforme de l'enseignement des mathématiques dans les pays représentés; on a pu constater qu'elle se trouve non seulement dans les étapes différentes (les programmes de transition et les programmes modernisés totalement), mais aussi qu'elle est conçue et organisée de diverses manières concernant telles questions, par exemple la construction axiomatique du cours, la place de la géométrie dans cette construction, etc.

Le point crucial du colloque était la confrontation des idées provoquée par la conférence et les interventions du Professeur A. Wittenberg, qui a insisté particulièrement sur la nécessité d'une conception pédagogique précise de la réforme et a souligné fortement les dangers liés à la modernisation formelle, ne trouvant pas la base adéquate dans la concience claire des objectifs et des moyens de l'évolution des résultats et dans la conception claire de l'éducation en général.

INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON MODERN TRENDS IN THE TEACHING OF MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS.

organized by the International Commission for the teaching of Mathematics

Utrecht, Holland, 19-23 December, 1965

This Colloquium, organized by Professor H. Freudenthal, had 28 members from 9 European countries, the United States and Canada. In the 16 lectures presented by experts invited by the CIES, the themes treated can be grouped as follows:

1) The general principles of the reform in the teaching of mathematics (Lectures by A. Wittenberg: Priorities and responsibilities in the reform of mathematics teaching).

2) Reports of the work done in certain centres concerning the programmes developed, the retaining of teachers and other activities (lectures by H. Freudenthal, H. Troelstra, L. R. J. Westermann, St. Straszewicz, M. Beberman, M. Thwaites, W. O. Storer, Th. J. Korthagen, and J. van Lint.

3) Reports on experiments already completed in modern teaching and projects concerning the setting up of certain fragments of mathematics in line with the new programmes (lectures : Mathematical analysis - W. Servais and J. Dzewas; algebraic structures - W.G. Steiner; logic - A. Z. Krygowska; mathematics in the first stage of secondary school - L. Félix, E. Castelnuovo; the mathematical laboratory - A. Delessert).

The lectures and the discussion which followed them brought out the reform in the teaching of mathematics in the countries represented. It was evident that not only were they in different stages (there were programmes of transition and other programmes totally modernized), but also that they were conceived and organized in different ways concerning such questions as, for example, the axiomatic construction of the course, the place of geometry in this construction, etc.

The crucial point of the colloquium was the confrontation of the ideas provoked by the lectures and the interventions of Professor A. Wittenberg, who stressed particularly the necessity of a precise pedagogical conception of the reform. He also underlined the dangers connected with a formal modernization which did not have an adequate basis in a clear consciousness of the objectives, the means of getting results, and a clear conception of education in general.

CONGRES SUR L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES ET LE PROGRES ECONOMIQUE

organisé par la Commmission Inter-Unions de l'Enseignement des Sciences (CIES) du Conseil international des Unions scientifiques (ICSU)

avec concours de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques

Dakar, Janvier 1965

Le Congrès a réuni 84 participants, venus de neuf pays d'Afrique, de quatre pays d'Amérique, de cinq pays d'Asie et de neuf pays d'Europe, spécialistes en astronomie, biologie, biophysique, chimie, cristallographie, économie, géographie, géologie, mathématique, mécanique, physiologie végétale, physique et zoologie. Il convient de relever la proportion importante des mathématiciens (25), ce qui témoigne de l'intérêt que les maîtres de cette discipline attachent à la rénovation de l'enseignement. L'Unesco a été représentée par M. P. Bandyopadhyay et Mme Anne Hunwald, la Commission internationale de l'Enseignement des Mathématiques, par M. le Professeur A. Lichnerowicz, Président de la Commission et M. le Professeur A. Delessert, Secrétaire.

Les problèmes de base envisagés au cours des séances du Congrès ont été les suivants :

Enseignement scientifique et problèmes économiques.

Amélioration de connexions entre les divers enseignements scientifiques.

Enseignement scientifique pré-universitaire et formation de maîtres.

Formation des techniciens

Enseignement relatif aux ressources naturelles.

Six groupes de travail se sont réunis pendant les quatre jours précédant le Congrès. Les échanges de vues ont été fondés sur les documents préparés d'avance pour chaque groupe par les rapporteurs spécialistes, concernant les thèmes suivants :

1) l'enseignement des mathématiques, de la physique et de la chimie à l'usage des biologistes (Prof. R. Heller, Paris).

2) Mathématiques dans l'enseignement des géologues (Prof. T.N. George, Glasgow).

3) L'enseignement des mathématiques pour les physiciens (Prof. Ch. Pisot, Paris).

4) Education mathématique pour les besoins scientifiques, techniques et industriels de la société (Prof. H. F. Fehr, New-York).

5) La formation des techniciens (Prof. M.Y. Bernard, Paris).

6) Conservation et exploitation des ressources naturelles: l'enseignement et l'organisation des instituts spécialisés et les problèmes particuliers des pays d'Afrique (Prof. J.G. Baer, Neuchâtel).

Cinq de ces groupes de travail ont bénéficié d'une aide financière de l'Unesco, par suite de l'intérêt porté par l'organisation aux problèmes étudiés.

Les conférences de M.H. Stone sur les aspects économiques de l'enseignement scientifique et de M.A. Bouc sur l'éducation et le développement ont mis en évidence, comme base commune de tous ces travaux, la conscience de l'interaction de l'éducation et du processus économique, ce qui est d'une grande importance pour les tendances nouvelles dans l'enseignement des mathématiques.

En ce qui concerne la question de l'amélioration des connexions entre les divers enseignements scientifiques, le Congrès a apporté une contribution concrète avec les projets de programmes des mathématiques de base pour l'étude des autres sciences.

Le groupe de travail dirigé par le Professeur Fehr a élaboré le programme de mathématiques pour les écoles primaire et secondaire, ainsi que certaines modifications en vue de l'enseignement des masses; en ce qui concerne la formation des maîtres, on a souligné expressement la nécessité de l'étude universitaire et post-universitaire approfondie des mathématiques mêmes, ainsi que de la préparation pédagogique adéquate.

Plusieurs participants exprimèrent le voeu que les réformes dans

l'enseignement des mathématiques ne soient pas trop brutales, qu'elles permettent une expression aussi adéquate que possible des problèmes de la réalité et une réalisation aisée des calculs numériques et algébriques.

Dans son exposé sur l'éducation scientifique et le progrès économique, le Professeur W. Jacobson a précisé les facteurs à considérer dans l'élaboration des programmes scientifiques, les éléments distinctifs et communs des programmes dans les différents pays se trouvant à différentes étapes de leur développement économique. Les principes généraux de l'enseignement secondaire des mathématiques et des sciences ont été formulés à la suite des séances du Congrès, comme conclusions finales, par le Professeur M. Minnaert.

La discussion sur les autres problèmes envisagés au cours du Congrès ne concernait pas directement les nouvelles tendances dans l'enseignement des mathématiques. De ce point de vue particulier, on doit traiter comme très importante la décision du Congrès de porter en premier lieu les efforts, dans les mois à venir, entre autres sur les objectifs suivants :

- Préparation d'une "Collection sélectionnée d'exemples d'application des divers chapitres des Mathématiques aux diverses autres Sciences" 1/
- Etude approfondie des conditions de la formation scientifique des maîtres de l'enseignement général et des enseignements secondaire et technique.
- Etude approfondie de la répartition des temps d'enseignement entre les diverses disciplines.

Tous ses problèmes sont à l'ordre du jour de la recherche concernant la modernisation de l'enseignemement des mathématiques.

Le rapport provisoire sur le Congrès de Dakar a été publié par le Secrétariat de la C.I.E.S. (3 boulevard Pasteur, Paris XVème); les rapports concernant l'enseignement des mathématiques sont reproduits dans le présent volume.

1/ Le travail préparatoire pour cette étude se poursuit activement avec le soutien de l'Unesco.

CONGRESS ON SCIENCE TEACHING AND ECONOMIC PROGRESS

organized by the Inter-union Commission for the teaching of Science (CIES) of the International Council of Scientific Unions (ICSU)

Dakar, January 1965

The Congress had 84 members, coming from 9 African countries, 4 American countries, 5 Asian countries and 9 European countries. They included specialists in Astronomy, Biology, Biophysics, Chemistry, Chrystallography, Economics, Geography, Geology, Mathematics, Mechanics, Vegetable Physiology, Physics and Zoology. It should be noted that there was a high proportion of Mathematicians (25) which indicates the interest which the masters of this discipline attach to the renewal of its teaching methods. Unesco was represented by Mr. P. Bandyopadhyay and Mrs. Anne Hunwald, while the International Commission for the teaching of Mathematics was represented by Professor A. Lichnerowicz, President of the Commission and Professor A. Delessert, Secretary.

The basic problems considered during the various sessions of the Congress were the following :

Scientific education and economic problems.

Improvement in the relations between various aspects of science education.

Pre-University scientific education and the training of teachers.

The training of technicians

Education concerning natural resources.

Six working groups had gathered during the four days preceding the Congress. Exchange of views were based on documents prepared in advance for each group by the specialist recorders on the following themes :

1) The teaching of Mathematics, Physics and Chemistry for biologists (Professor R. Heller, Paris).

2) Mathematics in the education of geologists (Professor T. N. George, Glasgow).

3) The teaching of Mathematics for Physicists (Professor Ch. Pisot, Paris).

4) Mathematical education for the scientific, technical and industrial needs of society (Professor H. W. Fehr, New York).

5) The training of technicians (Professor M. Y. Bernard, Paris).

6) Conservation and exploitation of natural resources; teaching and the organization of specialist institutes and the particular problems of African countries (Professor J. G. Baer, Neuchâtel).

Five of these working groups were supported financially by Unesco in view of the interest which the organization attaches to the problems studied.

The lectures of Mr. H. Stone on the economic aspects of scientific education and of Mr. A. Bouc on education and development brought out the common basis of all these works, the consciousness of the interaction of education and economic processes, which is of great importance for the new trends in mathematical education.

On the question of improving the connections between different aspects of scientific education, the Congress produced a concrete contribution with projects for programmes of basic mathematics necessary for the study of other sciences.

The working group under Professor Fehr elaborated the programme of mathematics for primary and secondary schools, together with certain modifications for the purpose of mass education. In connection with the training of teachers of Mathematics the necessity of a deep study of mathematics itself both at university and post university was emphasized, together with adequate pedagogical training.

Several members expressed the hope that reforms in the teaching of mathematics should not be too brutal, and that they should allow as adequately as possible an expression of the problems occurring in reality and leading easily to numerical and algebraic calculations.

In his lecture on scientific education and economic progress, Professor W. Jacobson indicated the factors to be considered in the elaboration of scientific programmes, the distinctive and common elements of the programmes in different countries which are at different stages of their economic development. The general principles for the teaching of

mathematics and of science at secondary schools were formulated after the sessions of the Congress, as final conclusions, by Professor M. Minnaert.

The discussions on other problems envisaged during the Congress did not directly involve the new trends in the teaching of mathematics. From this particular point of view, we can regard as very important the decision of the Congress to concentrate, in the months to come, on the following objectives.

- Preparation of a "Selected Collection of examples of the application of different chapters of Mathematics to the various other sciences". 1/
- Detailed study of the conditions for the scientific training of teachers for general education and for secondary and technical education.
- Detailed study of the apportioning of time for the study of various disciplines.

All these problems are in line with the research going on to modernize the teaching of mathematics.

The provisional report on the Dakar conference has been published by the Secretary of the C.I.E.S. (3, Boulevard Pasteur, Paris XV°): the reports concerning the teaching of mathematics are reproduced in the present volume.

1/ The preparatory work for this study is going on at the moment with the support of Unesco.

IXème REUNION DU COMITE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE DU CONSEIL DE L'EUROPE

Strasbourg, 9-12 Mars 1965

Parmi les problèmes qui ont été traités au cours de la réunion, il faut mentionner deux questions particulièrement importantes du point de vue des nouvelles tendances dans l'enseignement des mathématiques.

I. Dans le rapport du groupe sur l'enseignement de la chimie au niveau universitaire en Europe, on a souligné la nécessité d'une étude mathématique moderne et adaptée aux besoins des chimistes, qui irait parallelement avec l'étude de la chimie. Dans leurs travaux, les chimistes ont toujours eu besoin des notions mathématiques classiques et élémentaires (calcul différentiel, calcul intégral, calcul vectoriel, statistiques). Aujourd'hui, un nombre croissant d'entre eux éprouvent en plus la nécessité de faire appel à des techniques plus modernes et plus spécialisées (théorie des groupes, machines à calculer, etc..)

II. Le Comité a chargé le groupe d'étude pour les études comparatives de poursuivre l'examen de la question du rôle de l'Université dans la formation des maîtres. Le projet de mandat établi par le groupe intérimaire met en évidence les questions suivantes :

1) Jusqu'à quel point la formation à l'Université peut-elle être considérée comme désirable pour les maîtres autres que ceux de l'éducation secondaire ?

   i) maîtres des écoles primaires,

   ii) maîtres d'écoles techniques.

2) Comment peut-on concevoir et réaliser l'intégration de la formation des maîtres dans les collèges et dans les universités ?

3) Quelles sont les responsabilités de l'Université qui forment les maîtres appelés à former d'autres maîtres à leur tour ?

4) Jusqu'à quel point est-ce désirable de concevoir des programmes spécialisés (à l'université) pour les futurs maîtres du second degré ?

5) Est-ce désirable pour l'université de prendre une part active dans la formation pédagogique des maîtres pour les écoles secondaires ? (Soit par l'établissement d'un plan d'étude spéciale de programmes, cf. plus haut, ou en offrant intra muros une possibilité à la formation pédagogique spécialisée ?)

6) Est-ce désirable que l'université envisage une formation pédagogique pour les autres maîtres que ceux enseignant au niveau secondaire ?

i) maîtres des écoles primaires,

ii) maîtres d'écoles techniques.

7) Quel est le rôle de l'université dans les centres extra muros de formation pédagogique spécialisée ?

8) Quel est le rôle de l'université dans la formation continue de maîtres pour les écoles secondaires, en ce qui concerne :

a) sur leurs connaissances spéciales,

b) sur leur éducation générale,

c) sur leur formation pédagogique ?

9) Le rôle de l'université dans l'éducation continue de maîtres autres que ceux de l'enseignement secondaire :

a) sur leurs connaissances spécialisées,

b) sur leur éducation générale,

c) sur leur formation pédagogique.

10) Quel rôle l'université peut-elle jouer pour assister des maîtres qui devront confronter successivement les problèmes d'éducation actuels et ceux d'une société en pleine transformation ?

11) L'université peut-elle aider les maîtres en cherchant les solutions aux différents problèmes pédagogiques modernes, posés par l'acquisition de connaissances (manuels)?

12) Quel est le rôle de l'université par rapport aux problèmes généraux du développement des structures éducationnelles ?

13) Quels sont les avantages pour l'université d'un contact actif avec les autres formes d'enseignement ?

14) Quelles sont les possibilités pour les spécialistes en matières rarement ou pas du tout enseignées à l'école, d'entrer dans la carrière d'enseignement ?

Toutes ces questions sont particulièrement pressantes en ce qui concerne la formation des professeurs de mathématiques.

9th REUNION OF THE COUNCIL OF EUROPE COMMITTEE ON HIGHER EDUCATION AND RESEARCH

Strasbourg, 9-12 March, 1965

Among problems treated during the meeting, mention must be made of two questions of particular importance from the point of new trends in the teaching of mathematics.

I. In the report of the group concerned with the teaching of Chemistry at university level in Europe, the necessity of modern mathematics adapted to the needs of chemists was stressed. It was noted that outside the classical and elementary mathematical techniques (differential and integral calculus, vector calculus, statistics), an increasing number of chemists need more specialized topics (theory of groups, calculating machines, etc..)

II. The Committee asked the study group to examine the question of the role which universities could play in the training of teachers. The following questions were brought out :

1) To what extent can university training be regarded as desirable for teachers other than those destined for secondary education ?

   i) primary school teachers,

   ii) technical school teachers.

2) The integration or other forms of contact, between the training of teachers in Colleges and in Universities ?

3) What are the responsibilities of the university on the training of teachers who will train other teachers in their turn ?

4) To what extent is it desirable to have specialized programmes (at the university) for future teachers at the secondary grade.

5) Is it desirable for the university to take an active part in the pedagogical training of secondary school teachers ? (Either by setting up a plan for the special study of programmes, as above, or by offering a possibility of specialized teacher training).

6) Is it desirable that the university consider a teacher training for teachers other than those destined for secondary schools ?

i) Primary school teachers,

ii) Technical school teachers.

7) What is the role of the university in extra mural centres of specialized teacher training ?

8) What is the role of the university in the continuous training of teachers for secondary schools concerning :

a) their specialized lines
b) their general education

c) their teacher training ?

9) The role of the university in the continuous training of teachers other than those in secondary education :

a) in their specialized lines
b) in their general education

c) in their teacher training.

10) What role can the university play in assisting teachers who have to face successively the problems of actual education and those of a society in a state of full transformation ?

11) Can the university help in assisting teachers by looking for a solution to various modern pedagogical problems, arising from the acquisition of knowledge (handbooks).?

12) What is the role of the university in relation to general problems of the development of educational structures ?

13) What are the advantages to the university of an active contact with other forms of teaching ?

14) What are the possibilities for those who have specialized in topics rarely or never taught in school, to enter the teaching profession ?

All these questions are particularly pressing in the training of teachers of mathematics.

XIXème RENCONTRE DE PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

organisée par la Commission internationale pour l'Etude

et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

Milano Marittima - Ravenna, Italie, 9-17 Avril 1965

Thème général : la place de la géométrie dans un enseignement moderne des mathématiques.

La rencontre, dont les travaux ont été dirigés par le Professeur C. Papy, Président de la Commission, a réuni 60 participants de 14 pays (10 européens, 2 d'Afrique, 1 du Canada, 1 d'Argentine). Le délégué de l'Unesco a suivi une partie des travaux de la Conférence.

La discussion - selon le programme détaillé - a été concentrée sur les problèmes suivants :

1) Géométrie spontanée,
2) intuition géométrique et structures,
3) axiomatisation,
4) nombres et géométrie
5) géométrie et groupes,
6) espaces vectoriels.

A la base de toute la discussion se trouvaient avant tout les travaux exécutés par le Centre belge de la pédagogie des mathématiques. Les collaborateurs de ce centre ont présenté la revue détaillée de l'enseignement moderne de la géometrie inclus dans le cours de mathématique elémentaire. Les participants ont pu prendre connaissance de deux variantes de l'étude du groupe d'isométries déjà expérimentées dans les écoles belges. Les problèmes de liaison des expériences spatiales physiques avec la structure mathématique dite géometrie, des applications pratiques des connaissances géométriques, ainsi que de la corrélation de l'enseignement de la géométrie avec celui des autres sciences, ont provoqué des échanges d'opinions souvent opposées, particuliérement en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie jusqu'à l'âge de 14 ans. La discussion a révélé les objectifs différents qu'on se pose pour cet enseignement dans différents pays, ce qui est dû aussi

aux conceptions différentes de l'éducation générale à ce niveau.

A la suite des travaux de la réunion, les membres de la Commission (19 personnes représentant 14 pays) ont voté à l'unanimité la motion suivante présentée par le Professeur A. Revuz :

1. L'introduction dans l'enseignement de 10-11 ans à 18 ans de notions d'algèbre moderne se réalise sans grandes difficultés. Elles apportent la netteté et l'intelligibilité dans un domaine où le débutant ne connaissait qu'une pratique fondée sur la routine plus que sur la réflexion. Elles stimulent l'intérêt dans une étude où régnait souvent l'ennui.

Par contre, l'enseignement de la géométrie posait un difficile problème aux efforts de modernisation. Structurée depuis Euclide, possédant une incontestable beauté, la géométrie ne pouvait être incluse dans l'organisation dynamique de la mathématique actuelle qu'au prix d'une transformation profonde. L'exposé d'Euclide, ou ses variantes, a d'autre part encore des tenants qui lui manifestent un attachement de nature passionnelle et considérent comme un sacrilège toute tentative de modification. Une opposition de cette nature, si elle persistait, aboutirait à la disparition totale de la géométrie, ce que personne ne souhaite.

La réflexion des mathématiciens et l'expérience - en classe - des enseignants, a au contraire prouvé qu'il était actuellement possible de donner un enseignement de la géométrie qui satisfasse ce qu'il y a d'essentiel dans les diverses exigences que l'on formule de divers côtés à son égard, et que seule une vue superficielle risque de trouver contradictoires.

2. La géométrie occupe sans doute une place à part dans l'enseignement de 10 à 18 ans, mais il ne s'agit pas de la mettre tellement à part qu'elle ne débouche plus sur rien.

a) C'est, d'une part, une théorie mathématique relativement complexe et certainement la plus complexe de celles qui sont enseignées avant l'université. Mais cette théorie s'insère parfaitement dans l'organisation unifiée de la mathématique : elle est l'étude d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels, muni d'un produit scalaire ("vectoriel euclidien"). Ainsi considérée, elle permet et

impose une étude de structures qui sont fondamentales dans la plupart des branches de la mathématique (espaces vectoriels, groupes de transformation, espaces métriques...)

b) C'est, d'autre part, aussi une théorie physique qui rend compte d'une réalité quotidienne.

c) Un enseignement de la géométrie qui ne tiendrait pas compte de ces deux aspects serait incomplet et manquerait, à coup sûr, un de ses objectifs essentiels; donner une formation équilibrée. Si la complexité de la géométrie crée une difficulté pédagogique, la maîtrise de cette complexité et sa reduction à une structure mathématique qui l'exprime simplement sont des acquisitions capitales dans l'éducation d'un esprit.

3. En particulier, les expériences faites sous l'inspiration du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique prouvent que ces exigences peuvent être réalisées.

Deux stades doivent être distingués à ce propos :

a) Elèves de 10-11 ans à 14-15 ans:

L'étude est préparée par la manipulation préalable des notions d'ensembles, de relations, de lois de composition, de groupes.
Disposant de ces outils, dégagés de situations diverses, en majorité non géométriques, on peut alors procéder à une construction de la géometrie qui utilise les démarches géométriques spontanées de l'enfant, et la conception géométrique qui domine dans la société où il vit. Ceci conduit à une axiomatisation que l'on dégage progressivement et qui permet, dès cet âge, une déduction véritable. Au cours de cette construction sont obtenus le corps des réels, les espaces vectoriels de dimension deux et trois sur ce corps, les produits scalaires sur de tels espaces.

Il s'agit dans tous les cas d'une construction consciente à partir d'une réalité non contestée et d'une idéalisation courante, et non moins acceptée, de celle-ci; d'une construction qui, il faut le souligner, est constamment le résultat de l'activité de l'enfant guidé par son maître, qui sans dogmatisme lui éclaire la route.

b) <u>Elèves de 14-15 ans à 17-18 ans:</u>

A la fin de la période précédente, l'élève a acquis une experience déjà très riche. Toutefois, s'il lui était demandé de réexposer lui-même tout le cheminement parcouru, il s'en serait, en général pas capable, et serait la proie d'un grand découragement. Mais, récisément, à ce stade, on peut lui faire remarquer qu'il n'a nullement besoin de tout reprendre,et qu'il lui suffit d'utiliser la structure de "vectoriel euclidien " qu'il a construite,car celle-ci résume d'un seul coup les résultats de trois années de mathématisation de l'espace concret. Il comprend alors qu'il dispose d'une autre axiomatisation de la géométrie, qui est logiquement équivalente à la premiere et, par suite, exprime la même réalité, le rend tout aussi disponible à l'égard de l'espace concret, mais qui est mathématiquement beaucoup plus puissante, parce que plus dépouillée, mieux structurée et plus directement opératoire. Muni de cet outil, non seulement il retrouvera et condensera tous les résultats acquis, mais il ira sans peine au-delà: la trigonométrie, les nombres complexes seront des conquêtes faciles et naturelles.

L'élève aura ainsi <u>vécu</u> ce qu'est une axiomatisation, ce qu'est la comparaison de deux axiomatiques, et éprouvé ce que sont les vertus d'une "bonne" axiomatique. Il aura non seulement acquis des connaissances importantes, mais une véritable culture, grâce à laquelle, s'il s'en tient là, il ne sera pas intellectuellement dépaysé dans sa propre époque; et, s'il poursuit, il n'aura qu'à développer et fortifier les activités qu'il a appris à mener sans devoir se livrer à de pénibles reconversions.

4. Tenant soigneusement compte des données psycho-sociologiques, pédagogiques et mathématiques du problème de l'enseignement de la géométrie, il a donc été possible d'en dégager une solution dont l'existence est du domaine du fait. Cette preuve par l'expérience a fait justice d'un certain nombre d'opinions imprudemment avancées sur l'âge au-dessous duquel certaines notions seraient inaccessibles aux enfants.

Cette solution, qui comporte d'ailleurs des variantes, n'est sans doute pas la seule possible. Elle fournit cependant un exemple qui peut être immédiatement exploité.

XIXth MEETING OF MATHEMATICS TEACHERS

organized by the International Commission for the study and improvement of mathematics teaching

Milano Marittima - Ravennà, Italy. 9-17 April, 1965

General theme : the place of geometry in a modern mathematical education.

The Conference, whose work was directed by Professor G. Papy, President of the Commission, had 60 members from 14 countries, (10 Europeans, 2 Africans, 1 from Canada, 1 from Argentina). The Unesco delegate followed a part of the proceedings.

The discussion - according to the detailed programme - concentrated on the following problems :

1) Spontaneous Geometry,
2) Geometric Intuition and structures,
3) Axiomatization,
4) Numbers and geometry,
5) Geometry and groups,
6) Vector spaces.

At the basis of all the discussion there was, first of all, the work carried out by the Belgian centre for the pedagogy of Mathematics. The collaborators of this centre gave a detailed account of the modern teaching of geometry included in the course of elementary mathematics. Those taking part took account of two variants of the study of the group of isometries already tried out in Belgian schools. The problems of the liaison between the physical experience of space and the mathematical structure called geometry, pratical applications of geometrical knowledge, as well as the correlation of the teaching of geometry with that of other sciences, provoked exchanges of opinions which were often opposed to each other, particularly as regards the teaching of geometry up to the age of 14 years. The discussion revealed different objectives for this teaching in different countries, which in turn is due to different conceptions of general education at this level.

Following the meetings of the conference, the members of the Commission (19 persons representing 14 countries) passed unanimously the

following resolution presented by Professor A. Revuz :

1. The introduction into the teaching from 10-11 years to 18 years of some notions of modern algebra can be carried out without great difficulty. Such notions bring neatness and intelligibility in a domain where the beginner only knew a practice based more on routine than on reflexion. They stimulate interest in a study where there was previously boredom.

On the contrary, the teaching of geometry put a difficult problem in the efforts towards modernization. Having been given a structure since Euclid, possessing an incontestable beauty, geometry could not be included in the dynamic organization of the mathematics of to-day except at the price of a profound transformation. The teaching of Euclid, or its variants, still has some champions who have a passionate attachment to it and who regard as sacrilege any attempt to modify it. Such opposition, if persisted in, could lead to the complete disappearance of geometry, which nobody wants to see.

The reflections of mathematicians and the experience - in class - of the teachers, has proved on the contrary that it is actually possible to give a teaching of geometry which satisfies what is essential in the different demands which are formulated from different sides with respect to it. Only a superficial view of it leads to apparent contradiction.

2. Geometry has no doubt a special place in teaching from 10 to 18 years, but we should not treat it so much apart that it leads to nothing.

a) It is, on the one hand, a relatively complex mathematical theory, and certainly the most complex which is taught before the university. But this theory fits in perfectly in the unified organization of mathematics : it is the study of a vector space of finite dimension upon the field of reals, provided with a scalar product ("vectoriel euclidien"). Considered thus, it imposes the study of structures which is fundamental in most branches of mathematics (vector spaces, groups of transformations, metric spaces...)

b) It is also a physical theory which takes account of a daily reality.

c) A teaching of geometry which did not take account of these two aspects would be incomplete and would surely fail in one

of its essential objectives - that of giving a balanced training. If the complexity of geometry creates a pedagogical difficulty, the mastery of this complexity and its reduction to a mathematical structure which can be simply expressed is a capital acquisition in any one's education.

3. In particular, the experiments made under the inspiration of the Belgian centre of Mathematical Pedagogy prove that these requirements can be met.

Two stages must be treated separately for this purpose.

a) Pupils from 10-11 years to 14-15 years.

The study is prepared by the preliminary manipulation of the notions of sets, of relations, of laws of composition, of groups.

Disposing of these tools, taken from different situations, usually not geometrical, one can then proceed to a construction of geometry using the spontaneous geometric steps of a child, and the geometric conceptions which dominate in the society in which he lives. This leads to an axiomatization which can be carried out progressively and which leads, from this age, to a veritable deduction. During this construction there can be obtained the field of reals, vector spaces of dimensions two and three upon this field, and scalar products on these spaces.

In all these cases one is concerned with a conscious construction starting from an incontestable reality and of an equally well accepted idealization of this reality. This construction, it must be emphasized, is constantly the result of the activity of the child guided by his teacher, and which clarifies the path without dogmatism.

b) Pupils from 14-15 years to 17-18 years

At the end of the above period, the pupil has already acquired a very rich experience. All the same, if he were asked to explain himself all the steps which he had taken, he would not in general be capable of doing so, and might well be greatly discouraged. But, precisely at this stage, we can let him see that he does not need to repeat all, and that it suffices

to use the structure of "vectoriel euclidien" which he has constructed, since this notion collects together at one stroke the results of three years of mathematization of concrete space. This notion is mathematically more powerful, since it is more structured and more directly operative. Provided with this tool, not only can the pupil recollect and condense all the results obtained, but he can also go further without difficulty. Trigonometry and complex numbers will come easily and naturally to him.

The pupil will thus have lived what an axiomatization is, he will have compared two axiomatizations and decided what makes a "good" axiomatization. He will not only have acquired important knowledge, but a veritable culture, of which, if he retains it, he will not be intellectually deprived during his lifetime. Also, if he continues, he will only have to develop and fortify the activities which he has learnt without even having to undergo painful reconversions.

4. Taking careful note of the psycho-sociological, pedagogical and mathematical data of the problem of teaching geometry, it is possible to deduce a solution whose existence is now a fact. This proof by experiment justifies a certain number of opinions imprudently advanced at the age at which certain notions are inaccessible to children.

This solution, which has variants, is evidently not the only solution. It does however furnish an example which can be immediately exploited.

COLLOQUE D'ECHTERNACH

organisé par la Commission internationale de l'Enseignement Mathé matique sous les auspices de M. le Ministre de l'Education Nationale et des Affaires Culturelles du Grand-Duché de Luxembourg.

Echternach, Grand-Duché de Luxembourg, 30 Mai - 4 Juin 1965

Thème général : les répercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement.

Le Colloque a réuni 92 participants de 8 pays européens. On a présenté 16 conferences :

H. Behnke (Münster)	:	Die Auswirkung der Forschung auf den Unterricht
C. Bréard (Paris)	:	Pour une conception globale de l'enseignement mathématique
H. G. Steiner (Münster)	:	Verschiedene Aspekte der axiomatischen Methoden im Unterricht
A. Kirsch (Giessen)	:	Zur axiomatischen Behandlung der natürlichen Zahlen im Unterricht
W. Servais (Morlanwelz)	:	Axiomatisation et géométrie élémentaire (12-15 ans)
A. Revuz (Paris-Poitiers)	:	Il faut mettre l'accent dès que possible sur la notion de morphisme
Ch. Pisot (Paris)	:	Introduction par la théorie des nombres aux notions de groupe, d'anneau et de corps
G. Papy (Bruxelles)	:	Le vectoriel euclidien plan dans l'enseignement (15 ans)
J. Dieudonné (Nice)	:	Rôle de l'algèbre linéaire dans les mathématiques modernes
G. Pickert (Giessen)	:	Bilinearformen und Kegelschnitte
A. Delessert (Lausanne)	:	Existe-t-il des présentations de la géométrie euclidienne essentiellement différentes ?

P. Debbaut (Arlon) : Une approche géométrique des nombres réels

G. Choquet (Paris) : L'analyse dans l'enseignement du second degré

J. de Siebenthal (Lausanne) : Ontologie mathématique et algorithmes.

L. N. H. Bunt (Utrecht) : Methoden für den Unterricht im Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

A. Engel (Stuttgart) : Mathematische Forschung und Didaktik der Wahrscheinlichkeitstheorie

Les débats ont montré à quel point il est faux de prétendre que les mathématiques tuent la spontanéité.

Le Colloque a présenté une fresque vaste et colorée des problèmes qui se posent aujourd'hui à l'enseignement mathématique. Il fera date et il déterminera certainement une nouvelle prise de conscience chez de nombreux responsables de l'enseignement mathématique en Europe. Le succès complet de cette importante réunion doit être mis à l'actif de MM. les Professeurs Gloden et Foehr qui ont déployé toute la somptuosité et tout le charme de l'hospitalité luxembourgeoise.

Les textes des communications seront réunis dans un volume à paraître prochainement. D'autre part, il convient de noter que le bureau de la CIEM, quelques délégués nationaux ainsi que Mme la représentante de l'Unesco se sont réunis sous la présidence de M. le Prof. Lichnerowicz, au cours du Colloque d'Echternach, afin de régler quelques affaires urgentes relevant à la fois de la CIEM et de l'Unesco.

COLLOQUIUM OF ECHTERNACH

organized by the International Commission for Mathematics Teaching, under the auspices of the Minister for Education and Cultural Affairs for the Grand Duchy of Luxemburg.

Echternach, Grand Duchy of Luxemburg. 30 Mai - 4 June, 1965

General Theme : The repercussions of mathematics research and teaching.

The Colloquium had 92 members from 8 European countries. There were 16 lectures.

H. Behnke (Münster)	: The influence of research on teaching
C. Bréard (Paris)	: A global conception of mathematics teaching
H.G. Steiner (Münster)	: Different aspects of axiomatic methods in teaching.
A. Kirsch (Giessen)	: On the axiomatic treatment of natural numbers in teaching.
W. Servais (Morlanweiz)	: Axiomatization of elementary geometry (12-15 years)
A. Revuz (Paris-Poitiers)	: The accent must be put as early as possible on the notion of morphism
Ch. Pisot (Paris)	: Introduction to the notions of group, ring and field by means of number theory.
G. Papy (Brussels)	: The "vectoriel euclidien" plan in teaching (15 years)
J. Dieudonné (Nice)	: The role of linear algebra in modern mathematics.
G. Pickert (Giessen)	: Bilinear forms and Conic Sections.
A, Delessert (Lausanne)	: Can there exist essentially different presentations of Euclidean Geometry?
P. Debbaut (Arlon)	: A Geometric approach to real numbers.
G. Choquet (Paris)	: The analysis in the teaching of the second degree.

J. de Siebenthal (Lausanne) : Mathematical Ontology and Algorithms

L. N. H. Bunt (Utrecht) : Methods for the teaching of Probability theory and Statistics.

A. Engel (Stuttgart) : Mathematical research and Didactics in Probability theory.

The debates showed to what extent it is false to pretend that mathematics kills spontaneity.

The Colloquium presented a vast and colourful fresco of the problems which arise to-day in mathematics teaching. It will certainly introduce a new consciousness of responsibility among those concerned with mathematics teaching in Europe. The complete success of this important gathering must be credited to the activities of Professors Gloden and Foehr who deployed all the charm and the sumptuous hospitality of the Luxemburgians.

The texts of the communications will be collected in one volume soon. It is also to be noted that the bureau of CIEM, some national delegates, as well as the representative of Unesco met under the presidency of Professor Lichnerowicz, during the colloquium at Echternach, to arrange certain urgent matters concerning both CIEM and Unesco.

J. de Siebenthal (Lausanne) : Mathematical Ontology and Algorithms

L. N. H. Bunt (Utrecht) : Method for the teaching of Probability theory and Statistics

A. Engel (Stuttgart) : Mathematical research and Didactics in Probability theory

The debates showed to what extent it is false to pretend that mathematics kills spontaneity.

The Colloquium presented a vast and coloured fresco of the problems which arise to-day in mathematics teaching. It will certainly introduce a new consciousness of responsibility among those concerned with mathematics teaching in Europe. The complete success of this important gathering must be credited to the activities of Professors Glodén and Loohr who deployed all the charm and the sumptuous hospitality of the Luxemburgians.

The texts of the communications will be collected in one volume soon. It is also to be noted that the bureau of ICMI, some national delegates, as well as the representative of Unesco met under the presidency of Professor Lichnerowicz, during the colloquium at Echternach, to arrange certain urgent matters concerning both ICMI and Unesco.

SECTION IV

CENTRES

CENTRES DES NOUVELLES TENDANCES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Le grand mouvement mondial de la réforme de l'enseignement des mathématiques revêt, selon les conditions locales, des formes différentes.

En dehors des centres créés expressément pour ces objectifs et régis par des statuts précis, dont les activités sont déjà bien connues, on constate le développement rapide d'essais plus restreints, plus modestes, initiés et mis en oeuvre par de petits groupes de professeurs mêmes, par des associations professionnelles et scientifiques, par certaines écoles, etc.. Ces activités ne sont d'ailleurs pas homogènes en ce qui concerne la problématique particulière et les moyens appliqués en vue d'atteindre les buts visés. Les aspects différents sont avant tout mis en relief. On fait de grands efforts pour établir la construction moderne des mathématiques élémentaires, on élabore donc les programmes, les manuels, les guides pour les enseignants; on s'occupe de la réforme des méthodes ayant pour but d'activer le travail des élèves en mathématiques; on cherche les applications pédagogiques des moyens nouveaux mis à la disposition de l'enseignement par la technique; on prépare la réforme par recyclage des maîtres et par l'orientation du public; on pénètre par la recherche psychologique dans les procédés de la pensée mathématique de l'élève; on organise les expériences à l'école, les classes pilotes à plus ou moins grande échelle, etc.. On tâche de moderniser l'enseignement des mathématiques, soit par la révolution rapide, soit par l'évolution consistant dans la préparation de programmes transitoires.

Tous ces genres de recherches sont également importants, tous s'intègrent dans un mouvement dirigé vers la modernisation de l'enseignement des mathématiques. C'est pourquoi une information adéquate concernant ces tentatives, les résultats visés et ceux obtenus, les moyens appliqués, est absolument nécessaire. La liste qui suit n'est qu'une revue partielle et provisoire enregistrant seulement l'existence de certains centres, de groupes, d'institutions actifs dans le mouvement de la réforme de l'enseignement des mathématiques. Ce genre d'information sera, dans l'avenir, continuellement révisé et complété, sur la base de la documentation que l'Unesco espère obtenir de tous les pays participant à ce mouvement.

ALLEMAGNE (Rep. dem. d')

Zentrale staatliche Kommission für Mathematik beim Ministerium für Volksbildung (Commission centrale d'Etat pour les Mathématiques auprès du Ministère de l'Education.)

Ministerium für Volksbildung, 108, Berlin, Unter den Linden

Directeur-promoteur : Prof. Dr. Klaus Härtig

Objectifs : Elaboration des nouveaux principes pour le contenu et la structure de l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'éducation générale; introduction et application des notions de la théorie des ensembles et de la logique mathématique; formulation des points les plus importants pour la recherche et la coordination des recherches en cours; élaboration des nouveaux programmes; participation dans l'élaboration des matériaux nouveaux pour l'enseignement des mathématiques; planification et participation à la formation post-universitaire des maîtres; préparation de livres de mathématiques pour les élèves.

Niveau de l'enseignement : de la 1ère à la 12ème année d'enseignement

Revue : Mathematik in der Schule (Les Mathématiques à l'Ecole)

ALLEMAGNE (Rép. Féd. d')

Mathematisches Institut (Institut mathématique)

Freie Universität, Berlin, Berlin 33

Directeurs-promoteurs Prof. Dr. Meschkowski, Dr. Krupp, Prof. Grotemeyer

Mathematisches Institut der Universität (Institut mathématique de l'Université)

Freiburg/Breisgau, Hebelstrasse, 40

Directeur-promoteur : Prof. Dr. K. Fladt

Mathematisches Institut der Universität (Institut mathématique de l'Université)

Giessen, Arndtstrasse 2

Directeurs-promoteurs : Prof. Dr. G. Pickert, Dr. Kirsch

Mathematisches Institut der Universität (Institut mathématique de l'Université)

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 60

Directeur : Prof. Dr. B. Schönenberg

ALLEMAGNE (Rép. Féd. d') (suite)

Seminar für Didaktik der Mathematik (Séminaire pour la didactique des mathématiques)

Universität Münster, Münster/Westfalen, Schlossplatz, 2

Directeurs-promoteurs : Prof. Dr. H. Behnke, A. Steiner

ARGENTINE

Comision nacional para la Ensenanza de la Matematica (Commission nationale pour l'Enseignement des Mathématiques)

Azcuénaga 1234, Buenos Aires

Directeurs-promoteurs : Ing. José Babini, Comision nacional para la Ensenanza de la Matematica (Commission nationale pour l'enseignement des Mathématiques) Direccion general de ensenanza secundaria del Ministerio de Educacion (Direction générale de l'enseignement secondaire du Ministère de l'Education).

Objectifs: Mise à jour des programmes, amélioration des méthodes d'enseignement, formation et perfectionnement des maîtres, publication des textes et préparation des moyens qui contribuent au perfectionnement de l'enseignement des mathématiques. Depuis 1963, les membres de la Sous-Commission argentine de la CIEM, avec l'approbation du Ministère de l'Education, ont élaboré les nouveaux programmes contenant les aspects des mathématiques modernes qui seront introduits, dès l'année scolaire 1966.

Niveau de l'enseignement : enseignement secondaire; enseignement primaire en préparation.

Revue : Elementos

Matériel et publications : Guide pour l'enseignement de la géométrie, textes adaptés aux nouveaux programmes, matériel concret du type élaboré par le Prof. Emma Castelnuovo.

AUSTRALIE

Adelaïde Mathematics Project (Member ISGML) -(Projet mathématique d'Adelaïde)

University of Adelaïde

Directeur-promoteur : Z.P. Dienes

AUSTRALIE (suite)

Objectifs : Section théorique : recherche des problèmes psychologiques concernant l'enseignement des structures. Section de la pratique de l'éducation: recherche de la construction rationnelle de l'enseignement des mathématiques fondée sur les notions ensemblistes, la logique, l'étude des relations, des nombres, des bases différentes d'énumération etc. conduisant à l'arithmétique, à l'algèbre, aux vecteurs, à la géométrie des transformations, aux groupes mathématiques, etc.

Niveau de l'enseignement :enseignement primaire et secondaire

Matériel et publications : Ouvrages différents consacrés à la recherche psychopédagogique; matériaux concrets destinés à la recherche libre en classe et à la prise de conscience par l'élève des structures fondamentales des mathématiques contemporaines; guides à l'usage des maîtres.

Education Department, New South Wales (Département de l'Education, Nouvelle Galles du Sud)

Bridge Street, Sydney

Directeurs-promoteurs: Présidents du Comité des Programmes
7ème à 10ème année d'enseignement : Miss D.M. Wallant
11ème et 12ème années d'enseignement : T.G. Room

Objectifs : Programmes élaborés pour les examens publics. Série de programmes de transition de l'enseignement traditionnel à l'enseignement moderne.

Niveau de l'enseignement : 7ème à 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : Programmes et notes pour les enseignants

Education Department, Victoria (Département d'Education), Victoria

Treasury Place, Melbourne

Directeur-promoteur : R.H. Cowban

Papua New Guinea Mathematics Project (Projet Mathématiques des Papous de la Nouvelle Guinée)

Université d'Adelaïde

Directeur-promoteur : Z.P. Dienes

AUSTRALIE (suite)

Objectifs : En premier lieu l'enseignement des mathématiques à l'école primaire organisé selon les principes du Projet d'Adelaïde. Le projet de modernisation de toutes les écoles primaires et eventuellement de toutes les écoles secondaires.

Niveau de l'enseignement : école primaire

Western Australia Mathematics Project (Projet de Mathématiques de l'Australie occidentale)

State Education Department, Perth.

Directeur-promoteur : A. L. Blakers

BELGIQUE

Centre belge de pédagogie de la Mathématique
183 avenue Brugmann, Bruxelles 6

Directeur-promoteur : Prof. G. Papy, Université libre de Bruxelles

Objectifs : Recherche fondamentale en pédagogie de la mathématique effectuée par le promoteur avec la collaboration de 4 assistants belges et de 4 assistants étrangers. Information des enseignants par des cours organisés dans 21 villes belges ; organisation de stages pour les cadres et d'une réunion plénière annuelle à Arlon; commission d'élaboration des projets de programmes modernes à l'intention des autorités scolaires.

Niveau de l'enseignement : de 6 à 18 ans

Matériel et publications : articles, manuels, livres d'étude et guides pour les professeurs, annuaire "Arlon".

CANADA

Canadian Teachers' Federation (Fédération des maîtres canadiens)

Directeur-promoteur : Dr. Blair, Greensfield, 444 McLaren Street
Ottawa 4

DANEMARK.

Institut mathématique de l'Université d'Aarhus

Directeur-promoteur : Professeur Bundgaard.

Objectifs : Collaboration étroite avec le Comité Nordique pour la modernisation des mathématiques scolaires (v. Suède). Travaux dirigés par le Prof. Bent Christiansen (Collège Royal Danois d'Education, Département de Mathématiques, Drupvej 101, Copenhague, N. V.); préparation d'une série de textes pour l'enseignement des mathématiques modernes à l'usage de la radiodiffusion télévision danoise; écoles expérimentales, manuels modernes.

ESPAGNE

Comision nacional para el mejoramiento de la enseñanza de la matématica (Commission nationale pour l'amélioration de l'enseignement mathématique).

Instituto Jorge Juan de Matematica. Consejo superior de Investigaciones científicas, Serrano 123, Madrid 6

Directeur-promoteur : Prof. Pedro Abellanas

Objectifs : Etude de nouvelles méthodes pour l'enseignement de la mathématique, rédaction de textes pilotes et de nouveaux programmes.

Niveau de l'enseignement : Enseignement dans les lycées de 10 à 17 ans

Matériel et publications : Textes pilotes pour les deux premières années (âge de 10 à 11 ans et de 11 à 12 ans)

FRANCE

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public

29 Rue d'Ulm, Paris Vème

Objectifs : Modernisation de l'enseignement mathématique. Elaboration de programmes, organisation de conférences d'information des professeurs, relations pédagogiques internationales.

Niveau de l'enseignement : tous les niveaux: école élémentaire à faculté.

Revue : Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public.

FRANCE (suite)

Matériel et publications : brochures consacrées aux problèmes de la modernisation de l'enseignement des mathématiques.

Chantiers mathématiques

29 rue d'Ulm Paris Vème

Directeur-promoteur : Prof. A. Revuz

Objectifs : Faire des émissions télévisées spécialement destinées à l'information des professeurs de mathématiques, réalisées par la Radio-Télévision scolaire, 29 rue d'Ulm, Paris Vème, sous la responsabilité scientifique du Bureau de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

Matériel et publications : Documents d'accompagnement des émissions télévisées de la série portant le même titre : 1. Premier album d'images mathématiques, 306 p. - 2, Apprentissages(en cours d'édition) Service d'édition et de vente des publications de l'Education Nationale.

Centre d'Etudes du Processus d'Apprentissage en Mathématiques

65 rue Claude-Bernard, Paris Vème

Directeur-promoteur : R. Biemel

Objectifs : Diffusion des méthodes et du matériel didactique fondé sur les conceptions psychopédagogiques modernes.

Niveau de l'enseignement : école primaire

Matériel et publications : Matériel de Dienes, blocs logiques, réglettes blocs multibases, matériel algébrique et géometrique, livres sur la psychopédagogie et méthodologie de l'enseignement des mathématiques.

Institut Pédagogique National, Département de la Recherche pédagogique

29 rue d'Ulm, Paris Vème

Directeur-promoteur : Mme N. Pickard

Objectifs : Modernisation des méthodes d'enseignement des mathématiques, expériences dans les écoles élémentaires de divers départements, information des maîtres.

FRANCE (suite)

Niveau de l'enseignement : école primaire et ler cycle de l'école secondaire

Revues : Education et mathématiques. Bulletin de liaison et d'échanges pour un enseignement moderne des mathématiques.

FINLANDE

Collaboration étroite avec le Comité Nordique pour la modernisation des mathématiques scolaires (v. Suède). Les écoles expérimentales, manuels modernes.

HONGRIE

Comité pour la didactique mathématique de l'Université "Lorand Eötvös" Département des Sciences

Budapest VIII, Muzeum Krt. 6-8

Objectifs : Programmes, préparation de manuels, méthodes actives

Institut de la Recherche mathématique de l'Académie hongroise des Sciences, Département de l'enseignement mathématique

Budapest V, Reàltanoda u. 13-15

Directeur-promoteur : Prof. Dr. Janos Surànyi

Objectifs : Programmes pour les classes de mathématiques spéciales du lycée; séminaires sur la modernisation de l'enseignement des mathématiques

Niveau de l'enseignement : secondaire

Institut National Pédagogique Chaire Mathématique

Budapest VII, Gorkij fasor 17-21

Directeur-promoteur : Cser Andor

HONGRIE (suite)

Objectifs : Réforme des programmes, manuels, enseignement télévisé des classes expérimentales primaires

Niveau de l'enseignement : primaire et secondaire

ITALIE

Commissione Nazionale italiana per la modernizzazione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria (Commission nationale pour la modernisation de l'enseignement de la mathématique dans les écoles secondaires.

A. I. M. del Ministero della Pubblica Istruzione e presso Istituto di Geometria dell'Università di Bologna

Directeur-promoteur : Prof. Mario Villa, Università Bologna

Objectifs : organisation de cours pilotes pour les enseignants se préparant aux programmes modernes dans les classes pilotes, organisation de classes pilotes.

Matériel et publications : manuels pour les classes pilotes

Istituto di Matematiche complementari dell'Università di Torino (Institut de Mathématiques complémentaires de l'Université de Turin)

Via Carlo Alberto 10, Torino

Directeur-promoteur : Tullio Viola

Objectifs : organisation de la recherche dans le domaine de l' "histoire, la philosophie et la psychologie des mathématiques", applications des questions étudiées à la pédagogie des mathématiques, expériences dans les écoles élémentaires et moyennes

Matériel et publications : concernent surtout l'histoire des mathématiques et se trouvent dans différentes revues spécialisées.

Seminario di didattica della matematica (Séminaire de didactique des mathématiques)

ITALIE (suite)

Istituto matematico dell'Università, Viale Morgagni, 67/A, Firenze

Directeur-promoteur : Luigi Campedelli

Objectifs : Préparation culturelle et didactique du jeune professeur. Orientation moderne de l'enseignement selon les nouveaux développements des mathématiques

Niveau de l'enseignement : jeunes gens qui ont terminé leurs cours universitaires et qui se proposent de s'adonner à l'enseignement

Matériel et publications : Matériel didactique (collection de modèles géométriques, appareils optiques, films, etc.) livres et revues, textes scolaires, etc.

NORVEGE

Conseil d'Etat pour les expériences à l'Ecole

Munkedamsvn. 62, Oslo 2

Directeur-promoteur : Hjalmar Seim

Objectifs : Consultation au Ministère de l'Education concernant les programmes et les expériences à l'école (contenu et buts de l'enseignement, programmes et moyens intuitifs, etc.); comité spécial pour les expériences en mathématiques à l'école (sous la direction de K. Piene).

Niveau de l'enseignement : de la 1ère à la 12ème année d'enseignement.

Matériel et publications : Traduction en norvégien des manuels expérimentaux de mathématiques élémentaires modernes (préparée par le Comité nordique pour la modernisation des mathématiques).

Sous-Comité norvégien du Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école

Wergelandsvn. 15 II, Oslo 1.

Directeur-promoteur : K. Piene

Objectifs : Participation aux travaux du Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école (v. Suède). Classes

expérimentales, rédaction de manuels préparés par le Comité nordique en Norvège pour l'usage de ces classes.

PAYS-BAS

Commissie modernizering leerplan wiskunde (Commission pour la modernisation des programmes mathématiques à l'école secondaire)

Boothstraat 17, Utrecht

Directeurs-promoteurs : Prof. H. Th. M. Leeman; Prof. Dr. F. van der Blij

Objectifs : Elaboration de nouveaux programmes, préparation des manuels; expériences en classe concernant les programmes modernisés; cours pour les maîtres en fonction, organisés en collaboration avec les universités d'Utrecht et Groningue et l'Ecole supérieure technique d'Eindhoven.

Niveau de l'Enseignement : de la 7ème à la 12ème année d'enseignement.

Matériel et publications : manuels

POLOGNE

Katedra metodyki nauczania matematyki - Wyzsza Szkola Pedagogiczna w Krakowie (Chaire de méthodologie de l'enseignement des mathématiques, Ecole normale supérieure de Cracovie)

Straszewskiego 22, Krakow

Directeur-promoteur : Prof. Anna Zofia Krygowska

Objectifs : Recherche fondamentale dans la pédagogie des mathématiques; expériences à l'école

Niveau de l'enseignement : de la 5ème à la 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : volumes spéciaux des annuaires édités par l'Ecole Normale Supérieure de Cracovie, articles, manuels.

ROYAUME-UNI

The School Mathematics Project (SMP) - (Projet de mathématiques scolaires)

The School Mathematics Project, The University, Southampton

Directeur-promoteur : Prof. Bryan Thwaites

Objectifs : Développement d'un programme moderne pour tous les élèves des "grammar Schools", de l'âge de 11 à 18 ans, élaboration et production d'une série complète de manuels pour les élèves et guides du professeur, préparation de textes adéquats pour les examens ("ordinary level" et "advanced level")

Niveau de l'enseignement : de l'âge de 11 à 18 ans

Matériel et publications : manuels, guides pour professeurs, textes d'examens, rapports de conférences organisées par le centre.

The Association of Teachers of Mathematics

Vine Street Chambers, Nelson, Lancs

Objectif : Amélioration de l'enseignement mathématique

Revue : Mathematics Teaching

St. Dunstan project (Projet de St. Dunstan)

St. Dunstan College, Catford

Psychology and Mathematics Project (Projet psychologique et mathématique)

University of Manchester

Directeur-promoteur : Dr. R.R. Skemp

Objectifs : amélioration des méthodes d'enseignement, recherches dans la psychopédagogique concernant l'enseignement des mathématiques

The Midlands Mathematics Experiment (M.M.E.) - (Expérience mathématique dans les Midlands)

Directeur-promoteur : Cyril S.Hope, of Worchester Training College

Objectifs : Modernisation des programmes

SUEDE

Bureau national d'Education

Fack, Stockholm 22

Objectifs : expériences avec matériel auto-instructif

Niveau de l'enseignement : de la 7ème à la 9ème année d'enseignement et de la 10ème à la 12ème année (lycée)

Matériel et publications : Tests. Projet d'emploi du matériel produit commercialement.

Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen (Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école)

Ecklesiastikdepartementet, Fack, Stockholm 25

Directeurs-promoteurs : Lennart Sandgren, Prof. Matts Hästad

Objectifs : réforme des programmes au Danemark, en Finlande, Norvège et Suède. Le travail consiste dans la production de nouveaux manuels, dans l'enseignement expérimental, et dans des enquètes auprès des professeurs sur les manuels et les programmes modernes préparés par le Comité, etc.

Niveau de l'enseignement : Les 12 années d'enseignement, (l'âge des étudiants variant de 7 à 18 ans)

Matériel et publications : environ 20 manuels expérimentaux; quelques courts rapports.

SUISSE

Centre d'information mathématique du canton de Berne

Gymnase français de Bienne (canton de Berne)

Directeurs-promoteurs : J. Binz, E. Blanc

Objectifs : développer les contacts entre tous ceux qui, en Suisse ou à l'extérieur, s'interessent à la modernisation de l'enseignement mathématique, informer les collègues au moyen de bulletins, conférences,

cours de recyclage, etc., établir un programme de recherche et d'éxpériences dans les classes de l'enseignement secondaire, obtenir l'accord des autorités intéressées sur l'éxécution de ce programme.

Réalisations : Nombreux colloques, conférences et cours de recyclage d'un programme expérimental.

Centre Vaudois pour l'Enseignement mathématique

A. Delessert, Ecole Polytechnique de l'Université, 1000 Lausanne

Directeurs-promoteurs : T. Bernet A. Delessert

Objectifs : a) Assurer la mise à jour continue des enseignants en Mathématiques de l'enseignement secondaire, b) établir ou coordonner des expériences sur l'enseignement mathématique, c) faciliter les contacts entre les Universités et les écoles secondaires dans le domaine de l'enseignement mathématique.

Réalisations : Série de séminaires pour les enseignants. Dans chaque école secondaire du Canton de Vaud, les enseignants en mathématiques sont invités à de petites séances de travail. Du matériel théorique écrit et des problèmes leur sera diffusés par une unité d'édition attachée au centre.

Matériel : brochures mathématiques pour les enseignants.

TCHECOSLOVAQUIE

Kabinet pro modernizaci vyucovani Jednoty cs. matematiku a fyziku
(Centre pour la modernisation de l'enseignement de l'Union des mathematiciens et physiciens de Tchécoslovaques)

Zitna 25, Praha 1

Directeur-promoteur : Prof. Miloslav Valouch

Objectifs : Coordonner toutes les activités concernant la modernisation de l'enseignement de la mathématique et de la physique; étudier et reunir des matériels étrangers, préparer des programmes nouveaux, élaborer des textes expérimentaux, diriger et contrôler l'enseignement dans les classes-pilotes et propager les idées de la réforme scolaire.

Niveau de l'enseignement : enseignement primaire et secondaire (de la 1ère à la 12ème année de l'enseignement)

Matériel et publications : Le centre vient d'être fondé en fin d'année 1965. A présent il ne dispose que de textes préliminaires pour quelques classes-pilotes.

U.S.A.

Boston College Mathematics Institute (Institut de Mathématiques du Collège de Boston)

Mathematics Department, Boston College, Chestnut Hill Massachusetts 02167

Directeur-promoteur : Stanley Bezuska

Objectifs : Préparation des maîtres aux notions des mathématiques modernes et préparation des textes et matériaux à l'usage des élèves et des professeurs

Niveau de l'enseignement : élémentaire et secondaire

Matériel et publications : Manuels, livres d'orientation, textes pour l'enseignement programmé

Calandra's Physical Science & Mathematics Project (Projet de sciences physiques et mathématiques de Calandra)

Alexander Calandra Physics Department, Washington University, St. Louis, Missouri

Niveau de l'enseignement : de la 2ème à la 9ème année d'enseignement

Computer-Based Mathematics Instruction (CBMI) - (L'Enseignement des mathématiques basé sur les machines à enseigner)

Ventura Hall, Stanford University, Stanford, California

Directeur-promoteur : Prof. Patrick Suppes

Objectifs : développement et expériences dans l'utilisation des machines à enseigner les mathématiques à l'école élémentaire

Niveau de l'enseignement : classes 1, 2 et 4 et cours de logique mathématique pour la classe 5

Matériel et publications : textes pour l'enseignement programmé, textes d'information pour les maîtres

Entebbe Mathematics Workshop - (Laboratoire mathématique d'Entebbe)

Education Services Inc., 164 Main Street, Watertown, Mass. (African Education Project)

Directeurs-promoteurs : Prof. W.T. Martin, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.; Prof. John Oyelese, University of Ibadan, Western Nigeria; Prof. Donald E. Richmond, Williams College, Williamstown, Mass.

Objectifs : Préparation de manuels pour les élèves des écoles secondaires et primaires des pays d'Afrique et pour les maîtres, ainsi que des matériaux pour la préparation des maîtres; enseignement programmé; organisation des travaux collectifs dans ces domaines (séminaires annuels)

Niveau de l'enseignement : école primaire et secondaire; préparation des maîtres

Matériel et publications : séries de livres et de manuels pour les élèves et pour les maîtres

Greater Cleveland Mathematics Program (Programme des mathématiques de Greater Cleveland)

Rockefeller Building, Cleveland, 13, Ohio

Directeur-promoteur : George Cunningham

Objectifs : Développement du nouveau programme de mathématiques pour les écoles primaires et secondaires

Niveau de l'enseignement : primaire et secondaire

Matériel et publications : publications de "Science Research Associates", Chicago, 111

The Madison Project of Syracuse University & Webster College (Projet Madison de Syracuse du Collège de l'Université de Webster)

Webster College, St. Louis 19, Missouri 63119

Directeur-promoteur : Robert B. Davis

Objectifs : développer, propager et mettre en oeuvre le programme supplémentaire des mathématiques pour les classes enseignées traditionnellement de l'école maternelle jusqu'à la douzième année d'enseignement ; développement de l'activité de l'élève; organisation sociale du travail en classe; géométrie systématique traitement de l'axiomatique de l'algèbre, de la logique mathématique, des applications à la physique.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 9ème année d'enseignement

Matériel et publications : nombreux textes, matériel pour l'enseignement des mathématiques, films, tests.

Minnesota Mathematics and Science Teaching Project (Minnemast) (Projet d'enseignement des mathématiques et des sciences de Minnesota)

TSCE University of Minnesota, Minneapolis 55455

Directeurs-promoteurs : Dr. Paul C. Rosenbloom; Paul C. Berry

Objectifs : programme coordonné de mathématiques et de sciences jusqu'à la 9ème année d'enseignement, cours pour la formation des maîtres au cours de leurs études et des maîtres en fonction.

Niveau de l'enseignement : élémentaire et secondaire

Revue : Minnemast reports (trimestriel)

Matériel et publications : différents ouvrages d'information concernant l'enseignement des mathématiques et des sciences.

National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national des professeurs de mathématiques)

1201 Sixteenth Street, N.W., Washington, D.C.

Revue : Teacher of Mathematics

School Mathematics Study Group (Groupe d'étude de mathématiques scolaires)

SM SG Cedar Hall, Stanford University, Stanford, California

Directeur-promoteur : E.C. Begle

Objectifs : la recherche dans le contenu et les méthodes modernes de mathématiques à l'école, en coopération avec d'autres organisations de mathématiques, en vue d'encourager les recherches concernant l'éducation mathématique; préparation des maîtres.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 12ème classe

Matériel et publications : nombreuses publications (articles et livres d'orientation pour les maîtres, manuels modernes, rapports et conférences), matériel pour l'enseignement programmé, films, tests. Serie de publications spéciales sous le titre "Newsletters"

Stanford Elementary School Mathematics Project (Projet de Stanford de mathématiques pour l'école élémentaire

Stanford University, California

Directeur-promoteur : Prof. Patrick Suppes

Objectifs : développer et compléter le programme de l'école élémentaire commençant par des ensembles et des nombres, la construction géométrique et la logique. Donner une fondation plus solide aux mathématiques au niveau de l'école élémentaire.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 6ème année d'enseignement.

University of Illinois Arithmetic Project at Educational Services Inc. (Projet arithmétique de l'Université d'Illinois auprès des Services d'Education)

Educational Services Inc., 371 Main Street, Watertown, Massachusetts

Directeur-promoteur : David A. Page

Objectifs : préparation de films et de textes pour les maîtres de l'école primaire

Niveau de l'enseignement : en principe de la 1ère à la 6ème année d'enseignement

Matériel et publications : matériel pour l'enseignement des mathématiques et ses applications, textes pour l'instruction des maîtres.

University of Illinois Committee on School Mathematics (Comité de mathématiques scolaires de l'Universite d'Illinois)

University of Illinois, Urbana 1208 West Springfield Street

Directeur-promoteur : Max Beberman

Objectifs : Programme moderne pour les classes supérieures de l'école secondaire. Préparation et expérimentation du matériel pour l'école secondaire. Recherche dans la théorie de l'enseignement, en liaison avec l'enseignement des mathématiques. Recyclage des maîtres de mathématiques du point de vue des programmes modernes.

Niveau de l'enseignement : de la 7ème à la 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : textes pour les élèves et les maîtres; films.

University of Maryland Mathematics Project (UMMaP) - (Projet de mathématiques de l'Université de Maryland)

University of Maryland, Mathematical Project, College Park, Maryland 20742

Directeur-promoteur : John R. Mayor

Objectifs : Production de matériel important et significatif pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires. Recherche de l'utilisation du matériel mathématique pour l'enseignement programmé.

Niveau de l'enseignement : élémentaire et première année de l'école secondaire

Matériel et publications : manuels et textes

SECTION V

REVUES

PERIODICALS

SECTION V REVUES / PERIODICALS

Les nombres dans les références signifient :

1) entre parenthèses : première année de parution,

2) périodicité,

3) tirage,

4) nombre de pages.

Une astérisque indique que la revue n'est que partiellement consacrée à l'enseignement des mathématiques.

Allemagne (Rép. dém. d')

MATHEMATIK IN DER SCHULE (Mathématique à l'école)
(1963); 12;. . . . ; 80 pp.
Ministerium für Kultur der Deutschen Demokratischen Republik Berlin
(Ministère de la Culture de la République Démocratique d'Allemagne)
Volk und Wissen, Volkseigener Verlag , Berlin W. 8, Lindenstr. 54

Allemagne (Rep. Féd. d')

ARCHIMEDES (Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik).
Suggestions et problèmes pour les maîtres, les élèves et les amis des mathématiques.

(. . . .); 9; . . . . ; . . . .

Verlag Josef Habbel, Regensburg

DER MATHEMATIKUNTERRICHT (Beiträge zu seiner wissenschaftlichen und methodischen Gestaltung) / L'enseignement mathématique - contributions à sa formation scientifique et méthodologique.

(. . . .); 5 ; . . . . ; . . . . .
Klett Verlag, Stuttgart

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SEMESTERBERICHTE* (Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität) / Rapport semestriel mathématique-physique pour la promotion des relations entre l'école et l'université.
(1963); 2; 1,200; . . . .

Verlag Vanderhoreck Ruprecht, Göttingen

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT* (Zeitschrift des deutscher Vereins zur Förderung der mathematischen und natürwissenschaftlichen Unterrichts e. V.) / L'enseignement mathématique et scientifique - revue de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des mathématiques et des sciences) /

(1948); 10; 5,000; 50 p.

Ferd. Dummlos Verlag, Bonn u. Hirschgraben Verlag, Frankfurt a/M.

PRAXIS DER MATHEMATIK (Monatschrift der reinen und der angewandten Mathematik in Unterricht) / Pratique des mathématiques - Cahier mensuel des mathématiques pures & appliquées dans l'enseignement).

(1959); 12; 2,500; 30 p.

Aulis Verlag Denbner & Co., Antwerpenstr. 6-12, Köln.

Argentine

ELEMENTOS (Revista de Mathemàtica para la Enseñanza Media / Revue de Mathématiques pour l'enseignement secondaire)

(1963); 4; 2,000; 48 pp.

en castellano (en castillan)

Fernàndez Blanco 2045, Buenos Aires

Australia

AUSTRALIAN MATHEMATICS TEACHER (Le Professeur Australien de Mathématiques)
(1945); 3; 1,500; 32 p.

New South Wales Mathematical Association (Association mathématique de la Nouvelle Galles du Sud.)

(Rédacteur) J.H. Veness
Sydney Teachers' College, University Grounds, Sydney

VINCULUM
(1964); 3; 1,200; 12 p.
Victoria Mathematical Association (Association Mathématique de Victoria)

Rédacteur : G. L. Watson, Melbourne High School, South Yarra, Victoria

Belgique

MATHEMATICA ET PEDAGOGICA
Revue trimestrielle publiée par la Société belge de professeurs de mathématiques - (1953); 4; 700; .... (bil. français-flamand)
24, rue Paul Janson, La Louvière

MATHESIS

Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne

- (1881); 3; ....; ....

Jules Duculot, 11 rue Duculot, Gembloux

Canada

BULLETIN DE L'ASSOCIATION MATHEMATIQUE DE QUEBEC

(....) ; 3; ....;

Association mathématique de Québec

THE JOURNAL OF THE BRITISH COLUMBIA ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHERS

(Journal de l'Association des professeurs de mathématique de la Colombie britannique)

(....); ....; ....

British Columbia Teachers' Federation, 1815, West Seventh Avenue, Vancouver, B.C.

ONTARIO MATHEMATICS GAZETTE (Gazette de Mathématique d'Ontario)

(....); ....; ....

Ontario Mathematics Commission, 1260 Bay Street, Toronto

Chili

BOLETIN* (Bulletin)

(....); 1; 400; .....

Centro de Profesores de Matemàticas y Fisica, Instituto Pedagogico, (Centre de Professeurs de Mathématiques et de Physique, Institut Pédagogique)
Universidad de Chile (Université de Chili)
Mascul 774, Santiago

Espagne

GACETA MATHEMATICA (Gazette mathématique)

(....) 8; 1,100; 250 pp.

Instituto Jorge Juan de Matemàtica, Serraño 123, Madrid 6.

Finlande

ACTA PEDAGOGICA FENNICA *

(....); ....; .....; ...

Société pédagogique de Finlande.
Rédacteur en chef : Prof. Matti Koskenniemi,
Université d'Helsinki, Fabianink 33, Helsinki

ARKHIMEDES

(1949); 2; 500; 50 pp.
(bil. en finnois et suédois) Société finnoise de mathématiques et de physique)
Rédacteur en chef : Prof. P.J. Myrberg
Vakaustoimisto Box, Helsinki

MATEMAATTISTEN AINEIDEN AIKAKAUSKIRJA
(1937); 4; 1 200; 35 pp.
(bil. en finnois et suédois avec résumés en anglais)
(Association des professeurs de mathématiques, physique et chimie)
Rédacteur en chef : Dr. Urpe Kuuskoski
Linnankoskenk. 12 A 8, Helsinki.

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT (Journal scandinave de mathématiques)
(1953); 4; 2200; 50 pp.

(en danois, norvégien et suédois avec résumés en anglais)
Rédacteur en cher. Prof. Ernst S. Selmer
Matematisk Institutt. Allégt. 34, Bergen, Norvège

Rédacteur Finnois : Prof. Gunnar Hällström, Abo Akademi, Abo, Finlande.

OPETTAJAIN LEHTI

(....); ....; ....; ....

Association des maîtres d'écoles primaires de Finlande, Helsinki

Rédacteur: Antti Hentonen, Lönnrotink 25, Helsinki

France

BULLETIN DE L'ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

(1910); 5; 7 300;
29, Rue d'Ulm, Paris Vème

LES CAHIERS PEDAGOGIQUES *

(1945); 10; 15 000;

Service d'Edition et de vente des publications de l'Education Nationale, 13, rue du Four, Paris VIème

EDUCATION ET MATHEMATIQUES

(1961); 8; .... (multigraphié)

29, rue d'Ulm, Paris Vème

L'EDUCATION MATHEMATIQUE - problèmes et corrigés pour élèves de 13 à 17 ans
(1897); 20; ....;
Editions Vuibert, 63 boulevard Saint-Germain, Paris Vème

JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES - problèmes et corrigés pour élèves de 17 & 18 ans.

(1875) 20; ....; ....

Librairie Vuibert, 63, boulevard Saint-Germain, Paris Vème

MATHEMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES *

(1962); 4; .... (multigraphié)
Centre de Mathématique sociale et de Statistique, 17, rue Richer Paris IXème

REVUE DE MATHEMATIQUES SPECIALES

(1890); 10; ....;

Librairie Vuibert, 63, Boulevard Saint-Germain, Paris Vème

Hongrie

A MATEMATIKA TANITASA (Enseignement des mathématiques)

(1953); 6; 6000; 32 pp.

Ministère de l'Education et Société Mathématique Jànos Bolyai,
Posta Központi Hirlapiroda Jozsef Nàdortér 1, Budapest V.

MATEMATIKAI LAPOK (Journal Mathématique)

(....); 4; ....;

Société Mathématique Jànos Bolyai, Budapest

Inde

MATHEMATICS SEMINAR (Séminaire mathématique)

- (1957); 4; 265;

Bharti Printing Press, V111/60 Ajmeri Ghate, Delhi

THE MATHEMATICS STUDENT (L'étudiant en mathématiques)

(....); 4; ....

Prof. Shanti Narayan, Principal, Hansraj College, Delhi-6;

Italie

ARCHIMEDE - per gli insegnanti ed i cultori di matematiche pure e applicate (pour les enseignants et la culture des mathématiques pures et appliquées)

(1949); 6; 56

Via G. Bausan 12, Roma

PERIODICO DI MATEMATICHE (Périodique de mathématique)
Storia, Didattica, filosofia (histoire, didactique, philosophie)

(1921); 5; 1 600; 60

Nicola Zanichelli, Viale Jrnerio, Bologna

RIFORMA DELLA SCUOLA (Réforme de l'école) *
(1955); 12; ....; 72

Rédacteur ; Lucio Lombardo-Radice et Mario Monacorda
rédaction : Via del Conservatorio 55, Rome
adiministration : Via delle Zoccolette 30, Rome.

Japon

Issue of the Secondary Education (Publication d'Education secondaire) *
(....); ....; ....;

Ministry of Education, Kasumigaseki, Chiyoda-ku, Tokyo.

JOURNAL OF THE JAPANESE SOCIETY OF MATHEMATICAL EDUCATION (Journal de la Société d'Education mathématique du Japon)
(1946); ....; 6 000; 35 pp.

Part I : Arithmetical education (Education arithmétique) *
Part II: Mathematical education (Education mathématique)
Tokyo Kyôiku Daigaku (Tokyo University of Education)
24, Otsuka, Bunkyô-ku, Tokyo

MATHEMATICAL SCIENCE (Science mathématique)
(...); ....; ....

Diamond-sha
Kasumigaseki 3-3, Chiyoda-ku, Tokyo

SUGAKU SEMINAR (Séminaire de mathématiques) *
(....); ....; ....

Nihon-hyoron-sha
Suga-machi, Shinjuku-ku, Tokyo

Norvège

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT (Journal scandinave de mathématiques)
(1953); 4; 2200; 50 pp.
(en danois, norvégien et suédois avec résumés en anglais)
Matematisk Institut, Blindern, Oslo

Rédacteur: Allégt. 34, Bergen

(Rédacteur en chef: Prof. Ernst S. Selmer)
Rédacteur finnois : Prof. Gunnar af Hällström, Abo Akademi, Abo, Finlande

Pays-Bas

EUCLIDES - Maanblad voor de Didactick der Exacte Vakken (Journal mensuel pour l'enseignement des mathématiques)
(1924); 10; 1300; 48 pp.
Dutch Associations: Wimecos, Liwenagel & W. V. O.

Pologne

MATEMATYKA (Mathématiques)
(1948); 4; 14 500; 48 pp.
Rédacteur : Wrocław 9, rue 9 Maja 84
Editeur : PZWS (Etablissement d'Etat pour les livres scolaires), Warszawa, rue Kredytowa 9

NOWA SZKOŁA (L'école nouvelle) *
(....); 12; ....
Ministère de l'Instruction Publique PZWS, Warszawa, Plac Dabrowskiego 8

WIADOMOSCI MATEMATYCZNE (Informations mathématiques)
(1897); 3; .....; 100-150 pp.
Publié par la Société Mathématique Polonaise PWM
Rédaction : Warszawa, rue Sniadeckich 8
Editeur : PWM (Editions scientifiques d'Etat), Warszawa, rue Miodowa 10

République arabe unie

AL-RIYADIYAT (Mathématiques)
(1956); 3; 3500; 110 pp.
Rābitat Undarrisī al-Riyādiyat bil-Jumhūrīyan al-Arab-r'yah al Muttahidah (Association des Professeurs de mathématiques de la République arabe unie)
Taftish al-Riyādah, Al-Mabira al-Mujamma, Maydān al Tahrīr, Le Caire

Roumanie

GAZETA MATEMATICĂ SI FIZICĂ* (Gazette des sciences mathématiques & physiques)
Seria A - pentru profesori si studenţi (Série A - pour les professeurs et les étudiants)
(1895/1946); 12; 2500; 56 pp.
Societatea de Stiinţe matematice si fizice din R.P. Romănia (Société des sciences mathématiques et physiques)
(Série B - pour élèves et jeunesse)
(1950); 2; 22 000; 64 pp.
Societatea de Stiinte matematice si fizice din R.P. Romănia (Société des Sciences mathématiques et physiques de la R.P. roumaine)
Str. Academiei 14, Bucureşti

MATEMATIKAI ES FIZIKAI LAPOK (Gazette des sciences mathématiques et physiques)
(1953); 12; 2500; 48 pp.
Romàn Matematikai és Fizikai Tudomànyos Tàrsasàg (Association roumaine de mathématiques et de physique)
Str. Arany Jànos 11, Cluj

Royaume-Uni

MATHEMATICAL GAZETTE (Gazette mathématique)
The Journal of the Mathematical Association (journal de l'Association mathématique)
(1894); 4; ...... ; 129 pp.
Rédacteur en chef : Dr. E.A. Maxwell
G. Bell and Sons, Ltd.,
Portugal Street, Kingsway, London, W.C.2.
&
The Mathematical Association, 22 Bloomsbury Square, London, W.C.1.

MATHEMATICS TEACHING (Enseignement mathématique)
The Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics (bulletin de l'Association des professeurs de mathématique)
(1955); 4 ; .... ; 80 pp.
Rédacteur en chef : Mr. Claude Birtwistle,
Association of Teachers of Mathematics,
Vine Street Chambers, Nelson, Lancashire.

TEACHING ARITHMETICS (Enseignement de l'arithmétique)
The British Journal of elementary mathematics (journal britannique de mathématiques élémentaires)
(1963); 3; ....; .....;
Pergamon Press, Oxford, England and 122E. 55th Street, New York, N.Y. 10022

Suède

ELEMENTA
(....); 4; ....; 50 pp.
Fredsgatan 10, Uppsala

Suisse

ELEMENTE DER MATHEMATIK (Révue de mathématiques élémentaires)
(1946); 6; .....; 24 pp.
Verein schweizerischer Mathematik-und Physik-Lehrer (Association suisse de professeurs de mathématiques et de physique)
Rédacteur : Prof. Dr. E. Trost, Birkhäuser-Verlag, Bâle

L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE (Revue internationale)
Série II
Organe officiel de la CIEM
(1893); ....; .....
Institut de Mathématiques, Université, Genève

Tchécoslovaquie

MATEMATIKA VE SKOLE (Les mathématiques à l'école)
(1950); 10; 64;
(en tchèque et slovaque)
Lazarska 8, Praha 2

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE*
(Progrès des mathématiques, physique et astronomie)
(1956); 6; ....; 64 pp.
(en tchèque et slovaque)
Jednota ceskoslovenskych matematiku a fyziku (Union des mathématiciens et physiciens tchèques)
Maltézské nam 1, Praha 1

U.R.S.S.

MATEMATIKA V SKOLE (Les mathématiques à l'école)
Metodiceskij zurnal Ministerstva Prosvescenija R.S.F.S.R. (Journal méthodologique du Ministère de l'Instruction publique de l'U.R.S.S.)
(1934); 6; 150.000; 96 pp.
Ucpedgiz, 3 proezd Mar'inoj Rosci, 41, Moskva

U. S. A.

AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
(Journal américain mensuel de mathématiques)
(1894); 10; 11.000; ....
Mathematical Association of America (Association mathématique d'Amérique)
New York University, New York 53, N.Y.

ARITHMETIC TEACHER (Le professeur d'arithmétique)
(1954); ....; 16.000; ...
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques)
1201 16th Street, N.W., Washington 6, D.C.
Rédacteur : E. Glenadine Gibb, State College of Iowa, Cedar Falls, Iowa

ELEMENTARY SCHOOL JOURNAL* (Journal de l'école élémentaire)
(....); ...; ...; ... .
University of Chicago, Chicago, Illinois

INTERNATIONAL STUDY GROUP FOR MATHEMATICS LEARNING BULLETIN (Bulletin du groupe d'études international pour l'enseignement des mathématiques)
(1962); ....; 500 (multigraphié)
International Study Group for Mathematics Learning, California;
Palo Alto, California 94306

MATHEMATICS MAGAZINE (Revue de mathématiques)
(1947); 5; 2300; ....
Rédacteur : R.E. Horton
Mathematical Association of America, University of Buffalo,
Buffalo 14, N.Y.

MATHEMATICS STUDENT JOURNAL
(Journal des étudiants en mathématiques)
(1954); 4; 80.000; ...
Rédacteur: Myron F. Rosskopf, Teachers College, Columbia University, New York 27, N.Y.
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques) 1201 16th Street N.W., Washington 6, D.C.

THE MATHEMATICS TEACHER (Le professeur de mathématiques)
(1908); 8; 26.000; ...
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques), 1201 16th Street, N.W., Washington 6, D.C. 20036

SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS
(La science et les mathématiques à l'école)
Journal for all science and mathematical teachers (Journal pour tous les professeurs de science et de mathématiques)
(1901); 12; 6.500; ...
Rédacteur: G. Mallinson, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

SCIENTIFIC AMERICAN* (L'américain scientifique)
(1845); 12; ....; 180 pp.
415 Madison Avenue, New York 17, N.Y.

SCRIPTA MATHEMATICA
devoted to the philosophy, history and expository treatment of mathematics (consacré à la philosophie, l'histoire et l'enseignement des mathématiques)
(1933); 3; ....; ....
A. Celbort, Amsterdam avenue, 186th, New York, N.Y. 10033

Yougoslavie

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST ZA UČENIKE ŠREDNJICH ŠKOLA*
(Journal des mathématiques et de la physique pour les élèves des écoles secondaires)
(1951); 4; 19.000; 45 pp.
Drustvo matematicara i fizicara H R Hrvatske (Association des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Croatie)
Llica 16, Zagreb

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE*
(L'enseignement des mathématiques et de la physique)
(1951); 4; ....; 80 pp.
table des matières en français et en russe
Društvo matematičara i fizičara N. R. Srbije (Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie)
Boîte postale 791, Beograd

[A.2280] $ 6; 30/- (stg.); 21 F